2013年考研数学二真题及答案

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x),|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha\left(x\right)$（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价无穷小　　（D）与 x 等价无穷小

【详解】显然当 $x\to 0$ 时 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x^2,\sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x\sim\alpha(x)$，故应该选（C）．

2．已知 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\cos\left(xy\right)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right)=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【分析】本题考查的隐函数的求导法则信函数在一点导数的定义．

【详解】将 $x=0$ 代入方程得 $y=f(0)=1$，在方程两边求导，得 $-\sin(xy)(y+xy')-\dfrac{y'}{y}+1=0$，代入 $x=0,y=1$，知 $y'(0)=f'(0)=1$．

$$\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$，故应该选（A）．

3．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x,x\in[0,\pi)\\ 2,\ x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 则（　）

（A）$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点．　（B）$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点．

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 连续但不可导．　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 可导．

【详解】只要注意 $x=\pi$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，则应该是 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 连续点，但不可导．应选（C）．

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$，且反常积分 $\int^{+\infty}f\left(x\right)dx$ 收敛，则（　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$a>2$　　（C）$-2<a<0$　　（D）$0<\alpha<2$

【详解】$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\dfrac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}+\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$，

其中 $\int_1^e\dfrac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}=\int_0^{e-1}\dfrac{dt}{t^{\alpha-1}}$ 当且仅当 $\alpha-1<1$ 时才收敛；

而第二个反常积分$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=-\frac{1}{\alpha}\ln^{-\xi}x|_1^{+\infty}=-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^{\alpha}x}$，当且仅当$a>0$才收敛.

从而仅当$0<\alpha<2$时，反常积分$\int^{+\infty}f(x)dx$才收敛，故应选（D）.

5．设函数$z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中f可微，则$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（**A**）$2yf'(xy)$　（**B**）$-2yf'(xy)$（**C**）$\frac{2}{x}f(xy)$　（**D**）$-\frac{2}{x}f(xy)$

【详解】$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)\right)+\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy)$．应该选（**A**）.

6．设D_k是圆域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$的第$k$象限的部分，记$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$，则（　）

（**A**）$I_1>0$　（**B**）$I_2>0$　（**C**）$I_3>0$　（**D**）$I_4>0$

【详解】由极坐标系下二重积分的计算可知

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_{(k-1)\frac{\pi}{2}}^{k\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(\sin\theta-\cos\theta)r^2dr=\frac{1}{3}\int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi}(\sin\theta-\sin\theta)d\theta$$
$$=-\frac{1}{3}(\sin\theta+\cos\theta)|_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi}$$

所以$I_1=I_3=0,I_2=\frac{2}{3}\pi,I_4=-\frac{2}{3}\pi$，应该选（**B**）.

7．设A，B，C均为n阶矩阵，若A B＝C，且B可逆，则

（**A**）矩阵**C**的行向量组与矩阵**A**的行向量组等价.

（**B**）矩阵**C**的列向量组与矩阵**A**的列向量组等价.

（**C**）矩阵**C**的行向量组与矩阵**B**的行向量组等价.

（**D**）矩阵**C**的列向量组与矩阵**B**的列向量组等价.

【详解】把矩阵 **A**，**C** 列分块如下：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n),C=(\gamma_1,\gamma_2,\Lambda,\gamma_n)$，由于A B＝C，则可知$\gamma_i=b_{i1}\alpha_1+b_{i2}\alpha_2+\Lambda+b_{in}\alpha_n\ (i=1,2,\Lambda,n)$，得到矩阵**C**的列向量组可用矩阵**A**的列向量组线性表示.同时由于**B**可逆，即$A=CB^{-1}$，同理可知矩阵**A**的列向量组可用矩阵**C**的列向量组线性表示，所以矩阵**C**的列向量组与矩阵**A**的列向量组等价．应该选（**B**）.

8．矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是

（**A**）$a=0,b=2$　（**B**）$a=0$，b为任意常数

（C）$a=2,b=0$　　　　　　　（D）$a=2$，b 为任意常数

【详解】注意矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是对角矩阵，所以矩阵 **A**= $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是两个矩阵的特征值对应相等.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a^2)$$

从而可知 $2b-2a^2=2b$，即 $a=0$，b 为任意常数，故选择（**B**）.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9． $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

10．设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}|_{y=0}=$______.

【详解】由反函数的求导法则可知

$$\frac{dx}{dy}|_{y=0}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

11．设封闭曲线 **L** 的极坐标方程为 $r=\cos3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}\right)t$ 为参数，则 **L** 所围成的平面图形的面积为____________.

【详解】$A=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}r^2d\theta=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\dfrac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\dfrac{\pi}{12}$

所以．答案为 $\dfrac{\pi}{12}$.

12．曲线上 $\begin{cases}x=\arctan t\\y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 对应于 $t=1$ 处的法线方程为_____________.

【详解】当 $t=1$ 时，$x=\dfrac{\pi}{4},y=\dfrac{1}{2}\ln2$，　$y'|_{t=1}=\dfrac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}|_{t=1}=1$，所以法线方程为

$y-\dfrac{1}{2}\ln2=-1(x-\dfrac{\pi}{4})$，也就是 $y+x-\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{\pi}{4}=0$.

13．已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某个二阶常系数线性微分方程三个解，则满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 方程的解为______________.

【详解】显然 $y_1-y_3=e^{3x}$ 和 $y_2-y_3=e^x$ 是对应的二阶常系数线性齐次微分方程两个线性无关的解，由解的结构定理，该方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数．把初始条件代入可得 $C_1=1,C_2=-1$，所以答案为 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

14．设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为其行列式，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，且满足 $A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|$=______________.

【详解】由条件 $A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 可知 $A+A^{*T}=0$，其中 A^*为 **A** 的伴随矩阵，从而可知

$|A^*|=\left|A^{*T}\right|=|A|^{3-1}=-|A|$，所以 $|A|$ 可能为 -1 或 **0**.

但由结论 $r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n\\1,r(A)=n-1\\0,r(A)<n-1\end{cases}$ 可知，$A+A^{*T}=0$ 可知 $r(A)=r(A^*)$,伴随矩阵的秩只能为 **3**，所以 $|A|=-1$.

三、解答题

15.（本题满分 **10** 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，求常数 a,n．

【分析】主要是考查 $x\to 0$ 时常见函数的马克劳林展开式.

【详解】当 $x\to 0$ 时，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\cos 2x=1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$，$\cos 3x=1-\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)=1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)$，

所以 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x=1-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(1-2x^2+o(x^2))(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2))=7x^2+o(x^2)$，

由于 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，所以 $a=7,n=2$．

16.（本题满分 **10** 分）

设 **D** 是由曲线 $y=\sqrt[3]{x}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 及 x 轴所转成的平面图形，V_x,V_y 分别是 **D** 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的立体的体积，若 $10V_x=V_y$，求 a 的值.

【详解】由微元法可知

$V_x=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}\pi$；

$$V_y = 2\pi\int_0^a xf(x)dx = 2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{6}{7}a^{\frac{7}{3}}\pi;$$

由条件$10V_x = V_y$，知$a = 7\sqrt{7}$.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 是由曲线$x = 3y, y = 3x, x + y = 8$所围成，求$\iint\limits_D x^2dxdy$.

【详解】

$$\iint\limits_D x^2dxdy = \iint\limits_{D_1} x^2dxdy + \iint\limits_{D_2} x^2dxdy = \int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy = \frac{416}{3}.$$

18.（本题满分 10 分）

设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1) = 1$，证明：

（1）存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = 1$；

（2）存在$\eta \in (-1,1)$，使得$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【详解】

证明：（1）由于$f(x)$为奇函数，则$f(0) = 0$，由于$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，由拉格朗日定理，存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} = 1$.

（2）由于$f(x)$为奇函数，则$f'(x)$为偶函数，由（1）可知存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = 1$，且$f'(-\xi) = 1$，

令$\varphi(x) = e^x(f'(x) - 1)$，由条件显然可知$\varphi(x)$在$[-1,1]$上可导，且$\varphi(-\xi) = \varphi(\xi) = 0$，

由罗尔定理可知，存在$\eta \in (-\xi,\xi) \subset (-1,1)$，使得$\varphi'(\eta) = 0$, 即$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19.（本题满分 10 分）

求曲线$x^3 - xy + y^3 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

【分析】考查的二元函数的条件极值的拉格朗日乘子法.

【详解】构造函数$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$

令$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0 \\ x^3 - xy + y^3 = 1 \end{cases}$，得唯一驻点$x = 1, y = 1$，即$M_1(1,1)$.

考虑边界上的点，$M_2(0,1), M_3(1,0)$；

距离函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在三点的取值分别为 $f(1,1)=\sqrt{2}, f(0,1)=1, f(1,0)=1$，

所以最长距离为$\sqrt{2}$，最短距离为 **1.**

20.（本题满分 11）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$

⑴求 $f(x)$ 的最小值；

⑵设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

【详解】

（**1**） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得唯驻点$x=1$，

当$x\in(0,1)$时， $f'(x)<0$，函数单调递减；当$x\in(1,\infty)$时， $f'(x)>0$，函数单调递增.

所以函数在$x=1$处取得最小值 $f(1)=1$.

（**2**）证明：由于$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，但$\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\ge 1$，所以$\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$，故数列$\{x_n\}$单调递增.

又由于$\ln x_n\le\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，得到$0<x_n<e$，数列$\{x_n\}$有界.

由单调有界收敛定理可知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)=\ln a+\dfrac{1}{a}\le 1$，由（**1**）的结论可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=1$.

21.（本题满分 11）

设曲线 **L** 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\le x\le e)$.

（**1**）求 **L** 的弧长.

（**2**）设 **D** 是由曲线 **L**，直线$x=1,x=e$及x轴所围成的平面图形，求 **D** 的形心的横坐标.

【详解】

（**1**）曲线的弧微分为$dx=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}dx=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x})dx$，

所以弧长为$s=\int ds=\dfrac{1}{2}\int_1^e(x+\dfrac{1}{x})dx=\dfrac{e^2+1}{4}$.

（2）设形心坐标为$\left(\bar{x},\bar{y}\right)$，

则$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\dfrac{\int_1^e x\,dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}dy}{\int_1^e dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}dy}=\dfrac{\dfrac{e^4-2e^2-3}{16}}{\dfrac{e^3-7}{12}}=\dfrac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)}$.

22．本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，问当$a,b$为何值时，存在矩阵 C，使得$AC-CA=B$，并求出所有矩阵 C．

【详解】

显然由$AC-CA=B$可知，如果 C 存在，则必须是 2 阶的方阵．设$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，

则$AC-CA=B$变形为$\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，

即得到线性方程组$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$，要使 C 存在，此线性方程组必须有解，于是对方程组的增广矩阵进行初等行变换如下

$$\left(A\,|\,b\right)=\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix},$$

所以，当$a=-1,b=0$时，线性方程组有解，即存在矩阵 C，使得$AC-CA=B$．

此时，$\left(A\,|\,b\right)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

所以方程组的通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，也就是满足$AC-CA=B$的矩阵 C 为

$C=\begin{pmatrix}1+C_1+C_2 & -C_1\\ C_1 & C_2\end{pmatrix}$，其中$C_1,C_2$为任意常数．

23（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$． 记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$．

（**1**）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（**2**）若 α,β 正交且为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$．

【详解】证明：（1）

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)(\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$．

证明（**2**）设 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，由于 $|\alpha|=1,\beta^T\alpha=0$

则 $A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha|\alpha|^2+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$，所以 α 为矩阵对应特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量；

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta|\beta|^2=\beta$，所以 β 为矩阵对应特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量；

而矩阵 **A** 的秩 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，所以 $\lambda_3=0$ 也是矩阵的一个特征值．

故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$．