2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f^{'}(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^n n!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分必要条件.　　(B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）即非充分地非必要条件.

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1< I_2 <I_3$.　　(B) $I_2< I_2< I_3$.

(C) $I_1< I_3 <I_1$,　　(D) $I_1< I_2< I_3$.

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是

(A) $x_1> x_2, y_1< y_2$.　　(B) $x_1> x_2, y_1>y_1$.

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2.$ (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2.$

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=($ $)$

$(A)\pi$ $(B)2$ $(C)-2$ $(D)-\pi$ （7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中

c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（ ）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，

$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（ ）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ _______。

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$_______。

（11）设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$_______。

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为_______。

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_______。

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|BA^*|=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x,}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},-1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求$|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

(23)(本题满分 11 分)三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

2011 全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小，则

A k=1, c=4　B k=a, c=-4　C k=3, c=4　D k=3, c=-4

2. 已知$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

A $-2f'(0)$　B $-f'(0)$　C $f'(0)$　D0

3. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

A0　B1　C2　D3

4. 微分方程 $y'-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$的特解形式为

A　$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$　B $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

C $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$　D $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

5 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0, f'(0)>0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点（0，0）处取得极小值的一个充分条件

A $f(0)>1, f''(0)>0$　B $f(0)>1, f''(0)<0$

C $f(0)<1, f''(0)>0$ D $f(0)<1, f''(0)<0$

6. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$ 则I、J、K的大小关系是

A I<J<K B I<K<J C J<I<K D K<J<I

7. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵。记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 A=

A P_1P_2 B $P_1^{-1}P_2$ C P_2P_1 D $P_2^{-1}P_1$

8 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为

A α_1,α_3 B α_1,α_2 C $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ D $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=$

10. 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$满足条件$y(0)=0$的解$y=$

11. 曲线 $y=\int_0^x\tan tdt(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 的弧长 s=____________

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda^{-},x>0\\0,x\le 0\end{cases},\lambda>0$ ，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$

13. 设平面区域 D 由 y=x, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_D xyda=$ _________

14. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________________

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围。

16. 设函数 y=y(x)有参数方程 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3}\end{cases}$，求 y=y(x)的数值和曲线 y=y(x)的凹凸区间及拐点。

17. 设 $z = f(xy, yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 g(x)可导，且在 x=1 处取得极值 g(1)=1，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{x=1,y=1}$

18. 设函数 y(x)具有二阶导数，且曲线 l:y=y(x)与直线 y=x 相切于原点，记α是曲线 l 在点（x,y)外切线的倾角 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$，求 y(x)的表达式。

19. 证明：1）对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

2）设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{n}} - \ln n (n = 1,2,\ldots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛。

20. 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 旋转一周而成的曲面，该曲面由 $x^2 + y^2 = 2y (y \ge \frac{1}{2}), x^2 + y^2 = 1 (y \le \frac{1}{2})$ 连接而成。

（1）求容器的容积。

（2）若从容器内将容器的水从容器顶部全部抽出，至少需要多少功？（长度单位：m；重力加速度为 gm/s^2；水的密度为 $10^3 kg/m^3$）

21. 已知函数 f(x,y)具有二阶连续偏导数，且 f(1,y)=0，f(x,1)=0，$\iint_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分 $I = \iint_D xy \int_{xy}'' (x,y) dxdy$。

23. A 为三阶实矩阵，$R(A) = 2$，且 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值与特征向量；（2）求 A

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

1【答案】：C

【解析】：$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$，所以 $x = 1$ 为垂直的

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$，所以 $y = 1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

2

【答案】：C

【解析】：

$$f'(x) = e^x(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n) + (e^x - 1)(2e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n) + \cdots(e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(ne^{nx} - n)$$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$

3【答案】：(A)

【解析】：由于 $a_n>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$ 为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项和。正项级数前 n 项和有界与正向级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛是充要条件。故选 A

4【答案】：(D)

【解析】：: $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k'=e^{k^2}\sin k\geq 0,k\in(0,\pi)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3\in(0,\pi)$，则 $I_1<I_2<I_3$，故选 D

5【答案】：(D)

【解析】：$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D

6【答案】：（D）

【解析】： 由二重积分的区域对称性，

$$\iint(x^5y-1)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)dy=-\pi$$

7【答案】：（C）

【解析】：由于 $|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选（C）

8【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

故选（B）。

9【答案】：$\dfrac{2x}{e^y+1}$

【解析】：方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\dfrac{dy}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{e^y+1}$$

10【答案】：$\dfrac{\pi}{4}$

【解析】：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}.$

11【答案】：0.

【解析】：因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$，所以$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

12【答案】：$x=y^2$

【解析】：$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=3y-\dfrac{1}{y}x\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，所以

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$$

又因为$y=1$时$x=1$，解得$C=0$，故$x=y^2$.

13【答案】： $(-1,0)$

【解析】： 将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$或-1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为$(-1,0)$

14【答案】：-27

【解析】： 由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$

15 **【解析】：**（1）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}+1=1$，即 $a=1$

（2）,当 $x\to0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为,当 $x\to0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\frac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\frac{1}{6}x$，即 $k=1$

16【解析】： $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点. $f_x'(x,y)=e-x=0, f_y'(x,y)=-y=0$，解得函数为驻点为$(e,0)$.

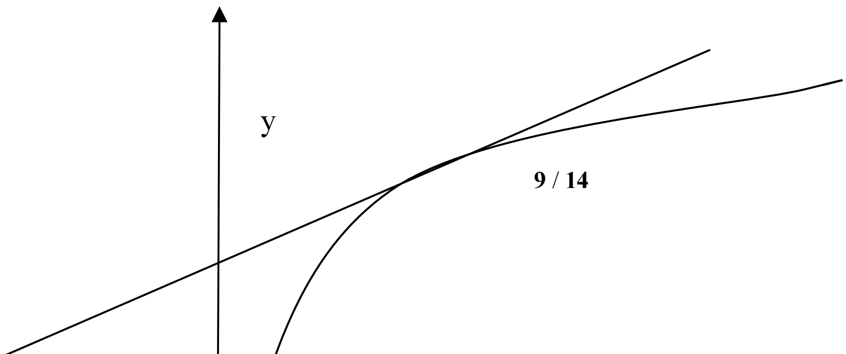
又 $A=f_{xx}'(e,0)=-1, B=f_{xy}'(e,0)=0, C=f_{yy}'(e,0)=-1$，

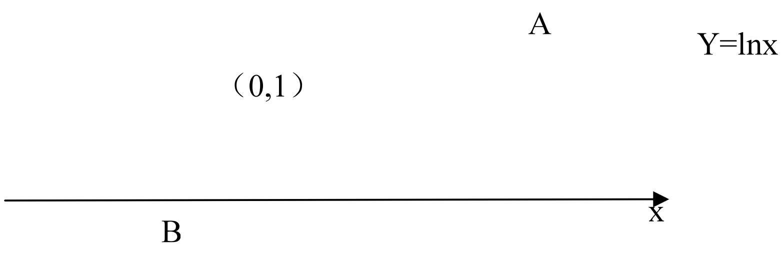
所以 $B^2-AC<0, A<0$，故 $f(x,y)$在点$(e,0)$处取得极大值 $f(e,0)=\frac{1}{2}e^2$.

17【解析】：

设切点坐标为 $A(x_0,\ln x_0)$，斜率为$\frac{1}{x_0}$，所以设切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，又因为该切线过 $B(0,1)$，所以 $x_0=e^2$，故切线方程为：$y=\frac{1}{e^2}x+1$

切线与 x 轴交点为 $B(-e^2,0)$





（1） $A=\int_0^2\left[e^y-e^2(y-1)\right]dy=\left[e^y-e^2(\frac{1}{2}y^2-y)\right]_0^2=e^2-1$

（2）

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 xdx\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln xdx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi\left(e^2+3\right)
\end{aligned}
$$

18【解析】: $\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta\\
&=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}\\
&=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 tdt\\
&=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\\
&=\frac{16}{15}
\end{aligned}
$$

19【解析】:

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，

$y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y''>0$；当 $x<0$ 时，$2x<0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $\left(0,0\right)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

20【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f'\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\frac{2}{\left(1-x\right)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x\geq 0$，

故 $f'\left(x\right)\geq 0$，而 $f\left(0\right)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\ x-\sin x\leq 0$，

故 $f'\left(x\right)\geq 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

21【解析】：**(1)** 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由

$f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理得在$(\frac{1}{2},1)$肯定有解$x_0$，假设在此区间还有另外一根$x_1$，所以$x_0{}^n+x_0{}^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1$，由归纳法得到$x_1=x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为x_n，即$f(x_n)=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，所以

$f(x_n)=\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=0,(\frac{1}{2}<x_n<1)$，

由于$x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知$x_{n+1}{}^n+x_{n+1}{}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$，由于$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，可知$x_{n+1}<x_n$。又由于$\frac{1}{2}<x_n<1$，也即$\{x_n\}$是单调的。则由单调有界收敛定理可知$\{x_n\}$收敛，假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知$a<x_2<x_1=1$。

当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a_n}-1=0$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

22【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有$1-a^4=0$及$-a-a^2=0$，可知$a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

线性方程组$Ax=b$存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即：$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，显然不符，故$\lambda=-1$.

23【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得B矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0,$解$(\lambda_1 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2,$解$(\lambda_2 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6,$解$(\lambda_3 E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$