2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　　）

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

(2) 下列曲线有渐近线的是（　　）

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin^2 x$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　　）

(A) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$　　(B) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(C) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$　　(D) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是（　　）

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　）

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\ \alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的　　(　　)

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx =$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x^2+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ ________.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 ________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1)$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心

坐标 $\bar{x}=$________.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围_______.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(18)（本题满分 10 分）设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（I） $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$，

（II） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)（本题满分 11 分） 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$

及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

(21) (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y)y(= y+ (1^2$ 2 y y

求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22) (本题满分 11 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

(23) (本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题：**1～8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）B

（2）B

（3）D

（4）C

（5）D

（6）A

（7）B

（8）A

二、填空题：**9–14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\frac{3\pi}{8}$

（10）$f(-1)=1$

（11）

（12）$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

（13）$\frac{11}{20}$

（14）[-2,2]

三、解答题：**15—23** 小题，共 **94** 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2 ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$$

令$u=\frac{1}{x}$,

则$\lim_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

因为

$$x^2+y^2y'=1-y',\ ①$$

得到$x^2=1,x=\pm1$

$$2x+2y(y')^2+y^2y''=-y'',$$

$$2+y^2(1)y''(1)=-y''(1)$$

$\Rightarrow y''(1)=\frac{-2}{y^2(1)+1}<0$，$\begin{aligned}&-2+y^2(-1)y''(-1)=-y''(-1)\\&\Rightarrow y''(-1)=\frac{2}{y^2(-1)+1}>0\end{aligned}$。

所以$x=1$时，取极大值$y(1)$。

$x=-1$时，取极小值$y(-1)$。

由①可知，

$$(y^2+1)dy=(1-x^2)dx$$

$$\frac{y^3}{3}+y=x-\frac{x^3}{3}+C,$$

因为$y(2)=0$，所以$C=\frac{2}{3}$，$\frac{y^3}{3}+y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}$。

所以$x=1$时，取极大值$y(1)=1$。

$x=-1$时，取极小值 $y(-1)=0$。

（17）【答案】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\rho\cos\theta\sin\pi\rho}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho\sin\pi\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho d\cos\pi\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta(\rho\cos\pi\rho\Big|_1^2-\frac{1}{\pi}\int_1^2\cos\pi\rho d\pi\rho)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot(2+1)$$

$$=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=-\frac{3}{4}$$

（18）【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4E+e^x\cos y)e^{2x}$$

$$f''(e^x\cos y)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

令 $e^x\cos y=u$，

则 $f''(u)=4f(u)+u$，

故 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4},(C_1,C_2\text{为任意常数})$

由 $f(0)=0,f'(0)=0,$ 得

$$f(u)=\frac{e^{2u}}{16}-\frac{e^{-2u}}{16}-\frac{u}{4}$$

（19）【答案】

证明：1）因为$0\le g(x)\le 1$，所以有定积分比较定理可知，$\int_a^x 0dt\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt$，即

$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$。

2）令

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^{x+\int_a^x g(t)dt-} f(t)dt$$

$$F(a)=0$$

$$F'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]g(x)$$

$$=g(x)\{f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\}$$

由 1）可知$\int_a^x g(t)dt\le x-a$，

所以$a+\int_a^x g(t)dt\le x$。

由$f(x)$是单调递增，可知

$$f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\ge 0$$

由因为$0\le g(x)\le 1$，所以$F'(x)\ge 0$，$F(x)$单调递增，所以$F(b)>F(a)=0$，得证。

（20）【答案】

因为

$$f_1(x)=\frac{x}{1+x},x\in[0,1]$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$\vdots$

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$$

所以

$$S=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1+nx-1}{1+nx}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx$$

$$=\frac{1}{n}(x-\frac{1}{n}ln(1+nx))\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}ln(1+n))$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}(1-\frac{ln(1+n)}{n})$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+n)}{n}=0$$

（21）【答案】

（22）【答案】① $\left(-1,2,3,1\right)^T$ ② $B=\begin{pmatrix} -k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}\left(k_1,k_2,k_3\in R\right)$

（23）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

2014考研数学真题答案（数二）

新东方在线

2014考研数学已经结束，新东方在线网络课堂考研辅导团队力邀名师第一时间对真题进行深度解析，以下是新东方在线考研数学辅导团队为大家总结的数学答案，供广大考生参考。

一、选择题

1.B

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x)^{\alpha}}{x}=2^{\alpha}\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{\alpha}-1}=0$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha}-1>0 \therefore \alpha<2$$

2、C

$$y=x+\sin\frac{1}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore y=x+\sin\frac{1}{x}\text{存在斜渐近线}y=x$$

3、D

举例：

$$\text{令}f\left(x\right)=x^2,\text{则在}[0,1]\text{区间}$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

$$\therefore g\left(x\right)=0\cdot(1-x)+1\cdot x=x$$

$$\therefore f\left(x\right)\le g\left(x\right)$$

$$\text{又}f''\left(x\right)=2\ge 0 \therefore D$$

4．C

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+4}{2t}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{2\cdot 2t-2(2t+4)}{(2t)^2}}{2t}=\frac{-8}{(2t)^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=-1$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore R=\frac{1}{k}=(1+3^2)^{\frac{3}{2}}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$$

5、

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}$. 故 $\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\bullet \arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

6、

排除法当 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$，因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 与 $B=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 异号.

$AC-B^2<0$，函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内没有极值.

连续函数在有界闭区域内有最大值和最小值，故最大值和最小值在 D 的边界点取到.

7、B

解析：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= a\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + c\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a\times d\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - c\times b\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (bc-ad)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -(ad-bc)^2$$

8、A

解析：

已知α_1，α_2，α_3无关

设$\lambda_1(\alpha_1+k\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$

即$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$

从而$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关

反之，若$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关，不一定有α_1，α_2，α_3无关

例如，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

二、填空题

9. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{3}{8}\pi$

10.

$f'(x)=2(x-1)x\in[0,2]$

$\therefore f(x)=x^2-2x+c$

又$f(x)$是奇函数

$\therefore f(0)=0\therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$

$x\in[0,2]$

$f(x)$的周期为4

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1$

11、解：方程两边对 x 求偏导：

$$e^{2yz}(2y\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+2x+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

代入$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

两边对y求偏导

$$e^{2yz}(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y})+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

代入$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$解得：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$$

12. 解：把极坐标方程化为直角坐标方程

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \theta\sin\theta \end{cases}$$

则$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$$

当$\theta = \dfrac{\pi}{2}$时，$\begin{cases} x = \theta\cos\theta = 0 \\ y = \theta\sin\theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

则切线方程为

$$(y - \frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$$

化简为

$$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$$

13、质心的横坐标：

$$\frac{\int_0^1 x f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = \frac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\,dx}{\int_0^1 (-x^2+2x+1)\,dx} = \frac{\left.(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\right|_0^1}{\left.(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\right|_0^1} = \frac{11}{20}$$

14、

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2a\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3$$

$$= (x_1 + a\,x_3)^2 - (x_2 - 2\,x_3)^2 + 4\,x_3^2 - a^2\,x_3^2$$

$\because$ f的负惯性指数为1

$\therefore$ $4-a^2 \ge 0$

$\therefore$ $-2 \le a \le 2$

三、解答题

15.

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)\,dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)\,dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}=\lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})$$

$$\underline{\underline{令\frac{1}{x}}}=t\lim_{x\to\infty}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^2)-1-t}{t^2}=\frac{1}{2}$$

16、

解：

$\because x^2+y^2y'=1-y'$

$\therefore y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

令$y'=0,\therefore x=\pm1$

$\therefore y''=\dfrac{-2x(y^2+1)-(1-x^2)\cdot 2yy'}{(y^2+1)^2}$

又$\because y'(1)=y'(-1)=0$

$\therefore y''(1)=\dfrac{-2}{y^2(1)+1}\langle 0,\therefore y(1)$为极大值

$y''(-1)=\dfrac{2}{y^2(1)+1}\rangle 0, y(-1)$为极小值

下求极值

$\because y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1},\therefore (y^2+1)dy=(1-x^2)dx,\therefore \int(y^2+1)dy=\int(1-x^2)dx$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+c$

又　$y(2)=0$

$\therefore c=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$

代入 $x=1$

$\therefore \frac{1}{3}y^3(1)+y(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$\therefore y(1)=1$

代入 $x=-1,$

$\therefore \frac{1}{3}y^3(-1)+y(-1)=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$

$\therefore y(-1)=0$

17、

解：积分区域D关于$y=x$对称，利用轮对称行，

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin(\pi r)r\,\mathrm{d}\,r=-\frac{1}{4}\int_1^2 rd\cos(\pi r)$$

$$=-\frac{1}{4}r\cos(\pi r)|_1^2+\frac{1}{4}\int_1^2\cos(\pi r)\,\mathrm{d}\,r$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

18、

解　　：

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\cdot\cos y,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos y\cdot(f''\cdot e^x\cdot\cos y\cdot e^x+f'\cdot e^x)=f''\cdot(e^x\cdot\cos y)^2+f'\cdot e^x\cdot\cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot e^x\cdot(-\sin y),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x[f''\cdot e^x\cdot(-\sin y)+f'\cdot\cos y]=(e^x)^2\sin y^2 f''-f'\cdot\cos y\cdot e^x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot e^{2x}=(4z+e^x\cdot\cos y)e^{2x}$

$\therefore f''(e^x\cdot\cos y)=4f(e^x\cdot\cos y)+e^x\cdot\cos y$

令$t=e^x\cdot\cos y,\therefore f''(t)=4f(t)+t$

$\therefore y''-4y=x$

求特征值：

$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \therefore x = \pm 2 \quad \therefore \widetilde{y(x)} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

再求非其次特征值。

$y^* = (ax + b)$ 代入 $\therefore y^* = -\frac{1}{4}x$

$\therefore y = \widetilde{y(x)} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x$

$y(0) = 0 = C_1 + C_2$

$y'(0) = 0 = x_1 - x_2 - \frac{1}{4}$

$$\therefore \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 2C_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{16} \\ C_2 = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\therefore f(\mu) = \frac{1}{16}e^{2\mu} - \frac{1}{16}e^{-2\mu} - \frac{1}{4}\mu$$

19.

解：(I)

$h_1(x) = \int_a^x g(t)dt$

$h_1(a) = 0$

$h_1'(x) = g(x) \ge 0$

$\therefore h_1(x)$单调不减

$\therefore$当$x \in [a,b]$时，$h_1(x) \ge 0$

$h_2(x) = \int_a^x g(t)dt - x + a$

$h_2'(x) = g(x) - 1$

$\because 0 \le g(x) \le 1 \therefore h_2'(x) \le 0$

$\therefore h_2(x)$单调不增又$h_2(a) = 0$

$\therefore$当$x \in [a,b]$时，$h_2(x) \le 0$

$$p(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$$

$$p'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\cdot g(x)=\left[f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\right]g(x)$$

$\because 0\le g(x)\le 1$

$\therefore \int_a^x g(t)dt\le\int_a^x dt=x-a \therefore a+\int_a^x g(t)dt\le x$

又$f(x)$单调增加

（II）$\therefore f(x)\ge f[a+\int_a^x g(t)dt] \therefore p'(x)\ge 0$

$\therefore p(x)$单调不减

又$p(a)=0 \therefore p(b)\ge 0$

即$\int_a^b f(x)g(x)dx\ge\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx$

20、

解：

$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$f_1(x)=f(x)$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x}$$

用归纳法知：$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$，$x\in[0,1]$

$$S_n=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{nx+1-1}{1+nx}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$

$$\lim_{n\to\infty} nS_n=\lim_{n\to\infty} n[\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)]=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$=1$$

21.

解：

因 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 则

$$f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$$

$$\begin{cases} f(y,y)=(y+1)^2-(2-y) \\ f(y,y)=y^2+2y+\varphi(y) \end{cases}$$

则 $\varphi(y)=y-1$

故 $f(x,y)=y^2+2y+x-1$

$f(x,y)=0 \Rightarrow x=-y^2-2y+1$

$$V=\int_0^2 \pi\left(f(x)+1\right)^2 dx=\int_0^2 \pi\left[f^2(x)+2f(x)+1\right]dx=\int_0^2 \pi(2-x)dx=\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=2\pi$$

22、

解：

$$(A)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-4r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_3+r_1]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1=-x_4 \\ x_2=2x_4 \\ x_3=3x_4 \\ x_4=x_4 \end{matrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1 \\ 2 \\ 3 \\ 1\end{pmatrix}$$ c 为任意常数

设 $B=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

c_1,c_2,c_3为任意常数

23、

解：

$$设A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

所以A的n个特征值为λ_1=n, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n$=0

又因为A是一个实对称矩阵，所以A可以相似对角化，且

$$A \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}，\left|\lambda E - B\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - N \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以B的n个特征值为$\lambda_1'=n, \lambda_2' = \cdots = \lambda_n'=0$

$$又\left|0E - B\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

所以$r(0E-B) = 1$

故B的n-1重特征值0有n-1个线性无关的特征向量

所以B也可以相似对角化，且$B \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

所以A与B相似。