2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、**填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）**

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ __________.

【考点】求“$\dfrac{0}{0}$”型极限.

【解】应填$-\dfrac{1}{6}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}\overset{\text{等}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2\left(1+x^2\right)}=-\frac{1}{6}.$$

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ __________.

【考点】求隐函数在指定点的微分.

【解】应填 $dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

方法 1:对方程 $2^{xy}=x+y$ 两边求微分,有

$$2^{xy}\ln 2\cdot(xdy+ydx)=dx+dy.$$

由所给方程知道, 当 $x=0$ 时 $y=1$, 将 $y=1$ 代入上式, 有 $\ln 2\cdot dx=dx+dy,$ 所以

$dy=(\ln 2-1)dx$.

方法 2:两边对 x 求导数,视 y 为该方程确定的函数,有 $2^{xy}\ln 2\cdot(xy'+y)=1+y'.$

当 $x=0$ 时 $y=1$,以此代入,得 $y'=\ln 2-1,$ 所以 $dy=(\ln 2-1)dx$.

（3）$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ __________.

【考点】计算广义积分.

【解】应填$\dfrac{\pi}{3}$.作积分变量替换,命 $\sqrt{x-2}=t, dx=2tdt,$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{(t^2+9)t}dt=2\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

【评注】广义积分可以像定积分那样作积分变量替换，$\arctan\frac{t}{3}\Big|_{3}^{+\infty}$ 实际上是表示 $\lim\limits_{b\to\infty}\arctan\frac{t}{3}\Big|_{0}^{b}$,包含代入上、下限以及取极限两道过程.

（4）曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 ________.

【考点】求渐近线方程.

【解】应填 $y=2x+1$.

按求写渐近线的方程,计算

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x].$$

命 $\frac{1}{x}=u$,从而 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{u\to 0^+}(\frac{2e^u-2}{u}-e^u)=2-1=1,$

所以 $x\to+\infty$ 方向有斜渐近线 $y=2x+1$.

对于 $x\to-\infty$ 方向也有斜渐近线 $y=2x+1$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（1）设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,$ 则常数 a,b 满足　（　）

（A）$a<0,b<0.$　　（B）$a>0,b>0.$

（C）$a\le 0,b>0.$　　（D）$a\ge 0,b<0.$

【考点】已知极限,确定其中参数(或参数的符号).

【解】应选(D).用排斥法.

如果 a<0 ,则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 的分母 $a+e^{bx}$ 有零点 x_0 ,从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续,与题设不符.不选(A),若 $b>0$,则无论 $a=0$ 还是 $a\neq 0$ 均有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ 与题设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 矛盾,不选(B),也不选(C).故选(D).

（2）设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则（　）

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

（C）点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【考点】极大值(极小值)的充分条件,拐点的充分条件.

【解】应选(C).由于

$$f''(0)=0-[f'(0)]^2=0,$$

无法确定选项,再求导数(因为下式右边存在,所以左边也存在):

$$f'''(x)=(x-[f'(x)]^2)'=1-2f'(x)f''(x).$$

以 $x=0$ 代入,有 $f'''(0)=1$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=f'''(0)=1.$$

从而知,存在 $x=0$ 去心临域,在此去心临域内， $f''(x)$ 与 x 同号,于是推知在此去心临域内当 $x<0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凸的,在此去心临域内 $x>0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凹的,选(C).

(3)设 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时，有 （ ）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$ （B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$ （D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

【考点】利用导数的符号讨论函数不等式.

【解】应选(A).

由题设知 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$

因此当 $a<x<b$ 时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

即 $f(x)g(b)>f(b)g(x),$ 可见（A）为正确选项.

（4）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为 （ ）

（A）0. （B）6. （C）36. （D） ∞.

【考点】已知含有抽象函数 $f(x)$ 的某极限,求含有 $f(x)$ 的另一极限,考查洛必达法则或佩亚

诺余项泰勒公式的使用,顺便考查正确使用等价无穷小替换.

【分析】本题有多种解法:(1)将含有 $f(x)$ 的要求极限的表达式凑成已知极限的表达式,或反之;(2)利用极限与无穷小的关系,从已知极限中解出 $f(x)$ 代入要求极限式中;(3)将具体函数用佩亚诺余项泰勒公式展开化简原极限.

【解】应选(C).

方法 1:

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6x-\sin 6x+\sin 6x+xf(x)}{x^3}.$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}\overset{等}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$=36+0=36$,选(C).

方法 2:由极限与无穷小关系,由已知极限式解出

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a,\lim_{x\to 0}a=0.$$

从而

$$f(x)=\frac{ax^3-\sin 6x}{x^3},$$

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}a+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}\overset{等}{=}36.$$ 选(C).

方法 3:将 $\sin 6x$ 在 $x=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开至 x^3 项:

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3),$$

于是

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6x+xf(x)-36x^3+o(x^3)}{x^3}$$

$$=\frac{6+f(x)}{x^2}-36+\frac{o(x^3)}{x^3},$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+36-\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0+36-0=36.$$

选(C).

（5）具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是 （　　）

（A） $y'''-y''-y'+y=0.$　　　　（B） $y'''+y''-y'-y=0.$

（C） $y'''-6y''+11y'-6y=0.$　　　　（D） $y'''-2y''-y'+2y=0.$

【考点】已知3阶常系数线性齐次微分方程的3个线性无关的特解,求该微分方程.

【解】应选(B).

对照常系数线性齐次微分方程的特征方程、特征根与解的对应关系知道,该方程的特征根为 $r_1=1(\text{单重}), r_2=-1(\text{二重})$, 因此特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2=r^3+r^2-r-1=0,$$

所以该微分方程为 $y'''-y''-y'+y=0.$ 选(B).

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$.

【考点】求不定积分.

【解】方法 1:先写出 $f(x)$ 的表达式.为此,命 $\ln x=t$,有

$x=e^t, f(t)=f(\ln x)=x^{-1}\ln(1+x)=e^{-t}\ln(1+e^t).$

$$\int f(x)dx=\int e^{-x}\ln(1+e^x)dx=-\int \ln(1+e^x)de^{-x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C.$$

方法 2:作积分变量替换,命 $x=\ln t$,

$$\int f(x)dx=\int f(\ln t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt=-\int\ln(1+t)d(\frac{1}{t})$$

$$=-[\frac{\ln(1+t)}{t}-\int\frac{1}{t(1+t)}dt]=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt$$

$$=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln t-\ln(1-t)+C$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+x-\ln(1+e^{x})+C.$$

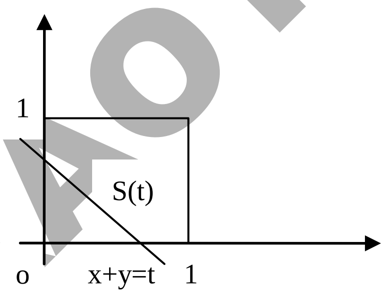
四、（本题满分 5 分）

设 xoy 平面上有正方形 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\ge 0)$.若

$S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)dt,(x\ge 0)$.

【考点】 分段函数的变限积分.

【解】先写出面积 $S(t)$ 的（分段）表达式，如下：



$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\le t\le 1,\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1<t\le 2,\\ 1, & 2<t.\end{cases}$$

当 $0\le x\le 1$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\frac{1}{2}t^2dt=\frac{x^3}{6}$;

当 $1<x\le 2$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^1 S(t)dt+\int_1^x S(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}t^2dt+\int_1^x[1-\frac{1}{2}(t-2)^2]dt$

$$=\frac{1}{6}+(x-1)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{1}{6}=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3}.$$

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^x S(t)dt=1+\int_2^x 1dt=x-1.$

因此，$\int_0^x S(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \le x \le 1, \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \le 2, \\ x-1, & x > 2. \end{cases}$

五、（本题满分 5 分）

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)(n \ge 3)$.

【考点】 高阶导数的莱布尼茨公式，或者由泰勒公式求高阶导数.

【解】方法 1:按莱布尼茨高阶导数公式：

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

代入，得

$$f^{(n)}(x) = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-1)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

所以 $f^{(n)}(0) = n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}, n = 3,4\cdots.$

方法 2：由麦克劳林公式，

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}),$$

$$x^2\ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^n).$$

对照麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

从而推知

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}, f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}, n = 3,4\cdots.$$

六、（本题满分 6 分）

设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

（1）当 n 为正整数，且 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$;

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【考点】证明积分不等式，求变限函数的某种极限，周期函数的积分性质.

【解】因为 $|\cos x|\geq 0$，且 $n\pi\leq x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx\leq\int_0^{x}|\cos x|dx<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx.$$

又因为 $|\cos x|$ 具有周期 π，在长度为 π 的积分区间上的积分值均相等：

$$\int_a^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx,$$

从而 $\int_0^{n\pi}|\cos x|dx=n\int_0^{\pi}|\cos x|dx=n(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx)=n(1-(-1))=2n,$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx=2(n+1).$$

所以 $2n\leq\int_0^{x}|\cos x|dx<2(n+1),$ 即 $2n\leq S(x)<2(n+1).$

（2）由（1）有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

命 $n\to\infty$ 取极限，由夹逼定理，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

七、（本题满分 7 分）

某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$，已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标.为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需要经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的）

【考点】微分方程在变化率上的应用,用微元法建模并求解.

【解】设从 2000 年初(相应 t=0)开始,第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m ,浓度为 $\frac{m}{V}$,则在时间间隔[t,t+dt]内,排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt,$ 流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$.因而时间从 t 到 t+dt 相应地湖泊中污染物 A 的改变量

$$dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt.$$

由分离变量法解之,得

$$m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}.$$

初始条件为$m(0)=5m_0$,代入初始条件得$C=-\frac{9}{2}m_0$.于是$m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$,命$m=m_0$,得

$t=6\ln 3$.即至多需经过$6\ln 3$年,湖泊中 A 的含量降至m_0以内.

八、(**本题满分 6 分**)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi} f(x)dx=0,\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$,试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

【考点】积分中值定理,罗尔定理,变上限函数,分部积分,或反证法.本题是一道涉及积分多方面的题,有相当的难度.

【解】 令$F(x)=\int_0^{\pi} f(t)dt$,则有$F(0)=F(\pi)=0$,又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)\\&=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx\\&=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx\end{aligned}$$

令 $G(x)=\int_0^{\pi}F(x)\sin tdt$, 则 $G(0)=G(\pi)=0$,

于是存在$\xi\in(0,\pi)$,使$F(\xi)\sin\xi=0$,因为当$\xi\in(0,\pi)$,这样就证明了.

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$$

再对$F(x)$在区间$[0,\xi],[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理知,至少存在$\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$

使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

九、(**本题满分 7 分**)

已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数,它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

【考点】按导数定义求导数,可导周期函数的导数性质,曲线的切线方程.

【解】将$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$两边命$x\to 0$取极限,注意到$f$的连续性得$-2f(1)=0$,故$f(1)=0$，又由原设有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{\sin x}\right)=8.$$

另一方面，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}$$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1),$$

所以$f'(1)=2$，又因$f'(6)=f'(5+1)=f'(1)$，所以$f'(6)=2$，切线方程为

$(y-f(6))=f'(6)(x-6)$. 以 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=2$ 代入得 $y=2x(-$ 即

$2x-y-12=0.$

十、（本题满分8分）

设曲线$y=ax^2(a>0,x\geq 0)$与$y=1-x^2$交于点A，过坐标原点O和点A的直线与曲线$y=ax^2$围成一平面图形.问a为何值时，该图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

【考点】求两曲线的交点，求旋转体体积，求最大值.

【解】当$x\geq 0$时,两曲线$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases}$的交点坐标为$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},y=\dfrac{a}{1+a}$,故直线OA的方程为

$$y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}$$

旋转体体积

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx=\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}}$$

求V的最大值,先求 $\dfrac{dV}{da}=\dfrac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}},(a>0).$

命 $\frac{dV}{da}=0$, 得唯一驻点 $a=4$, 所以 $a=4$ 也是 V 的最大值点，最大体积为

$V\big|_{a=4}=\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一、（本题满分 8 分）

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=1$ 且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

（1）求导数 $f'(x)$；

（2）证明：当 $x\geq 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

【考点】将变限积分方程化为微分方程求解, 证明不等式.

【解】(1) 将 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$ 变形为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0,$$

两边对 x 求导,得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$$

降阶,命 $u=f'(x)$, 化为 $\frac{du}{dx}=-\frac{x+2}{x+1}u$, 分离变量解之,得

$$f'(x)=u=\frac{Ce^{-x}}{x+1}.$$

再以 $x=0$ 代入原方程,并由 $f(0)=1$, 有 $f'(0)=-1$, 于是 $C=-1$, $f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)**方法 1**:用积分证.

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=1-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt.$$

而 $$0\leq\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt\leq\int_0^x e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^x=1-e^{-x},$$

所以 $$0\geq-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt\geq e^{-x}-1,$$

$$1\geq f(x)\geq e^{-x}.$$

方法 2:用微分学方法证.因 $f(0)=1, f'(x)<0$,所以当 $x\ge 0$ 时 $f(x)\le 1$.为证

$f(x)\ge e^{-x}$, 命 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x},\varphi(0)=1-1=0,\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}>f'(x)+\dfrac{e^{-x}}{x+1}=0$,

所以当 $x\ge 0$ 时 $\varphi(x)\ge 0$,即 $f(x)\ge e^{-x}$,结合两个不等式,推知当 $x\ge 0$ 时 $e^{-x}\le f(x)\le 1$.证毕.