

## 2001 年全国硕士研究生入学统一考试经济数学四试题答案

## 一、填空题

(1) 设生产函数为  $Q = AL^\alpha K^\beta$ , 其中  $Q$  是产出量,  $L$  是劳动投入量,  $K$  是资本投入量, 而  $A$ ,  $\alpha, \beta$  均为大于零的参数, 则当  $Q=1$  时  $K$  关于  $L$  的弹性为\_\_\_\_\_

【答】  $-\frac{\alpha}{\beta}$

【详解】 当  $Q=1$  时, 有  $K = A^{\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}$ ,  
于是  $K$  关于  $L$  的弹性为

$$\zeta = L \frac{K'(L)}{K(L)} = L \cdot \frac{-\frac{\alpha}{\beta} A^{\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{A^{\frac{1}{\beta}} L^{\frac{\alpha}{\beta}}} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

(2) 设  $z = e^{-x} - f(x-2y)$ , 且当  $y=0$  时,  $z = x^2$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$ \_\_\_\_\_

【答】  $2(x-2y) - e^{-x} + e^{2y-x}$

【详解】 由题设  $y=0$  时,  $z = x^2$ , 知  $x^2 = e^{-x} - f(x)$  即  $f(x) = e^{-x} - x^2$

于是  $z = e^{-x} - f(x-2y) = e^{-x} - e^{-(x-2y)} + (x-2y)^2$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} &= -e^{-x} + e^{-(x-2y)} + 2(x-2y) \\ &= 2(x-2y) - e^{-x} + e^{2y-x} \end{aligned}$$

(3) 设行列式  $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ , 则第四行各元素余子式之和的值为\_\_\_\_\_

【答】 -28

【详解1】 用  $M_{4,j}, j=(1,2,3,4)$  表示第四行各元素的余子式, 则

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -56, M_{42} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 42, M_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

故  $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -28$ .

【详解2】用  $A_{ij}$  ( $j=1,2,3,4$ ) 表示第四行各元素的代数余子式, 由于

$A_{4j} = (-1)^{4+j} M_{4j}$ , 于是有

$$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

(4) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ , 且秩(A)=3, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$

【答】 -3

【详解】由题设  $r(A)=3$ , 知必有

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3 = 0,$$

解得  $k=1$  或  $k=-3$ . 显然  $k=1$  时  $r(A)=1$ , 不符合题意, 因此一定有  $k=-3$ .

(5) 设随机变量  $X, Y$  的数学期望都是2, 方差分别为1和4, 而相关系数为0.5. 则根据切比雪夫不等式  $P\{|X-Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $\frac{1}{12}$

【详解】另  $Z=X-Y$ , 则

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 0,$$

$$D(Z) = D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X, Y)$$

$$= 1 + 4 - 2 \times 0.5 \times \sqrt{D(X)} \times \sqrt{D(Y)} = 3,$$

于是有

$$P\{|X - Y| \geq 6\} = P\{|Z - E(Z)| \geq 6\} \leq \frac{D(Z)}{6^2} = \frac{1}{12}.$$

二、选择题

(1) 设函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$ , 则

(A)  $x = a$  是 $f(x)$ 的极小值点.

(B)  $x = a$  是 $f(x)$ 的极大值点.

(C)  $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D)  $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,  $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【答】 [B]

【详解】 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$ , 知 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = 0$ , 即 $f'(a) = 0$ , 于是有

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1,$$

即 $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) = -1$ , 故 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 因此, 正确选项为(B).

(2) 设函数 $g(x) = \int_0^x f(u)du$ , 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ , 则 $g(x)$ 在区间

(0,2) 内

(A) 无界 (B) 递减 (C) 不连续 (D) 连续

【答】 [D]

【详解】 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x^2 + 1)dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x,$$

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 有

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x^2 + 1)dx + \int_1^x \frac{1}{3}(x-1)dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2,$$

即

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

显然 $g(x)$ 在区间(0,2) 内连续, 所以, 应选(D).

$$(3) \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } A \text{ 可逆, 则 } B^{-1} \text{ 等于}$$

- (A)  $A^{-1}P_1P_2$  (B)  $P_1A^{-1}P_2$  (C)  $P_1P_2A^{-1}$  (D)  $P_2A^{-1}P_1$ .

【答】 [C]

(4) 对于任意二事件A和B, 与 $A \cup B = B$ 不等价的是

- (A)  $A \subset B$ . (B)  $B \subset A$ . (C)  $AB = \emptyset$ . (D)  $AB = \emptyset$ .

【答】 [D]

【详解】 因为 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow AB = \emptyset$ .

所以正确选项为(D)

(5) 将一枚硬币重复掷 $n$ 次, 以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数, 则X和Y的相关系数等于

- (A) -1 (B) 0 (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1

【答】 [A]

【详解】 设X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数, 则有 $Y = n - X$ , 因此X和Y的相关系数为 $r = -1$ .

三、(本题满分8分)

设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两

式确定:  $e^{xy} - xy = 2$  和  $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\frac{du}{dx}$

【详解】 根据复合函数求导公式, 有

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (*)$$

由 $e^{xy} - xy = 2$ 两边对 $x$ 求导, 得

$$e^{xy}(y + x \frac{dy}{dx}) - (y + x \frac{dy}{dx}) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

由  $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ , 两边对  $x$  求导, 得

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \left[ 1 - \frac{dz}{dx} \right],$$

即

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入(\*)式, 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left( 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)} \right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

四、(本题满分8分)

已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$ ,

求  $c$  的值.

【详解】 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c}} \right]^{\frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$ .

又由拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) - f(x-1) = f'(\zeta) \cdot 1,$$

于是  $\zeta$  介于  $x-1$  与  $x$  之间, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\zeta) = e$$

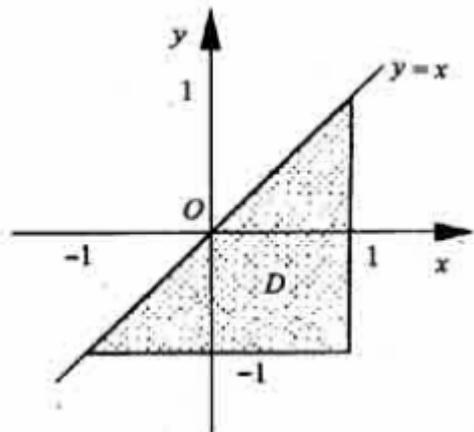
$$\text{从而 } e^{2c} = e \text{ 故 } c = \frac{1}{2}$$

五、(本题满分8分)

求二重积分  $\iint_D y [1 + x e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy$  的值, 其中  $D$  是由直线  $y=x$ ,  $y=-1$  及  $x=1$  围成的平面区域

域

【详解】 积分区域如图所示



$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy = \iint_D y dx dy + \iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy,$$

其中

$$\iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_y^1 y dx = \int_{-1}^1 y(1-y) dy = -\frac{2}{3};$$

$$\iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx = \int_{-1}^1 y(e^{\frac{1}{2}(1+y^2)} - e^{\frac{1}{2}y^2}) dy = 0$$

于是

$$\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy = -\frac{2}{3}$$

六、(本题满分9分)

某商品进价为  $a$  (元/件), 根据以往经验, 当销售价为  $b$  (元/件) 时, 销售量为  $c$  件 ( $a, b, c$  均为正常数, 且  $b \geq \frac{4}{3}a$ ), 市场调查表明, 销售价每下降 10%, 销售量可增加 40%, 现决定一次性降价, 试问, 当销售价定为多少时, 可获得最大利润? 并求出最大利润.

【详解】 设  $p$  表示降价后的销售价,  $x$  为增加的销售量,  $L(x)$  为总利润, 那么

$$\frac{x}{b-p} = \frac{0.4c}{0.1b},$$

$$\text{则 } p = b - \frac{b}{4c}x,$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } L(x) = R - C &= p(c+x) - a(c+x) \\ &= (b - \frac{b}{4c}x - a)(c+x). \end{aligned}$$

$$\text{对 } x \text{ 求导, 得 } L'(x) = -\frac{b}{2c}x + \frac{3}{4}b - a,$$

令  $L'(x) = 0$ , 得唯一驻点

$$x_0 = \frac{(3b-4a)c}{2b}.$$

由问题的实际意义或  $L''(x_0) = -\frac{b}{2c} < 0$ , 可知,  $x_0$  为极大值点, 也是最大值点, 故定价为

$$p = b - \left(\frac{3}{8}b - \frac{1}{2}a\right) = \frac{5}{8}b + \frac{1}{2}a (\text{元}).$$
 时得最大利润为

$$L(x_0) = \frac{c}{16b}(5b-4a)^2 (\text{元}).$$

七、(本题满分9分)

设  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且满足

$$f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx,$$

证明存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ .

【详解】 由  $f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx$ , 及积分中值定理, 知至少存在一点

$$\xi \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \subset [0,1],$$
 使得

$$f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx = e^{1-\xi^2} f(\xi) = 0, \text{ 即 } f(1)e^{-1} = e^{-\xi^2} f(\xi).$$

令  $F(x) = e^{-x^2} f(x)$ . 那么,  $F(x)$  在  $[\xi, 1]$  上连续, 在  $(\xi, 1)$  内可导, 且  $F(\xi) = F(1)$

由罗尔中值定理知, 至少存在一点  $\xi \in (\xi, 1) \subset (0,1)$ , 使得

$$F'(\xi) = -2\xi e^{-\xi^2} f(\xi) + e^{-\xi^2} f'(\xi) = 0,$$

$$\text{即 } f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$$

八、(本题满分8分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty]$  内连续,  $f(1) = \frac{5}{2}$ , 且对所有  $x, t \in (0, +\infty)$ , 满足条件

$$\int_1^x f(u) du = t \int_1^x f(u) du, \text{ 求 } f(x).$$

【详解】 由题意可知, 等式的每一项都是  $x$  的可导函数, 于是等式两边对  $x$  求导, 得

$$tf(x) = tf(x) + \int_1^t f(u) du, \quad \textcircled{1}$$

在①式中, 令  $x=1$ , 由  $f(1) = \frac{5}{2}$ , 得

$$tf(t) = \frac{5}{2}t + \int_1^t f(u) du, \quad \textcircled{2}$$

则  $f(t)$  是  $(0, +\infty)$  内的可导函数. ②式两边对  $t$  求导, 得

$$f(t) + tf'(t) = \frac{5}{2} + f(t), \text{ 即 } f'(t) = \frac{5}{2t}.$$

上式两边求积分,得

$$f(t) = \frac{5}{2} \ln t + C.$$

$$\text{由 } f(1) = \frac{5}{2}, \text{ 得 } C = \frac{5}{2}.$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{5}{2}(\ln x + 1).$$

九、(本题满分13分)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ . 已知线性方程组  $AX = \beta$  有解但不唯一,试求:

(1)  $a$  的值;

(2) 正交矩阵  $Q$ , 使  $Q^T A Q$  为对角矩阵.

【详解】

(1) 对线性方程组  $AX = \beta$  的增广矩阵作行初等变换,有

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & : & 1 \\ 1 & a & 1 & : & 1 \\ a & 1 & 1 & : & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & : & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & : & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & : & a+2 \end{bmatrix}$$

因为方程组  $AX = \beta$  有解但不唯一,所以  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 故  $a = -2$ .

(2) 由(1),有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A$  的特征多项式  $\lambda E - A = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$ .

故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0$ .

对应的特征向量依次为

$$\alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T.$$

由于他们是三个不同特征值的特征向量,因此相互正交,将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  单位化,得

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \beta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

令

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$\text{则有 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

十、(本题满分13分)

设  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T (i=1, 2, \dots, r, r < n)$  是  $n$  维实向量, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关. 已知

$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  的线性相关性.

【详解】 设有一组数  $k_1, k_2, \dots, k_r, k$  使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + k\beta = 0, \quad (*) \text{ 成立.}$$

因为  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

的非零解向量, 故有  $\alpha_i^T \beta = 0 (i=1, 2, \dots, r)$ ,

也即  $\beta^T \alpha_i = 0 (i=1, 2, \dots, r)$

于是, 由  $k_1\beta^T \alpha_1 + k_2\beta^T \alpha_2 + \dots + k_r\beta^T \alpha_r + k\beta^T \beta = 0$ ,

得  $k\beta^T \beta = 0$ . 但  $\beta^T \beta \neq 0$ , 故  $k=0$

从而(\*)式化为  $k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r = 0$ ,

由于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 所以  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

即  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = k = 0$ .

因此向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  线性无关.

十一、(本题满分13分)

生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的, 假设每箱平均重50千克, 标准差为5千克. 若用最大载重量为5吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于0.977. ( $\Phi(2) = 0.977$ , 其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数).

【详解】 设  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是装运的第  $i$  箱的重量(单位: 千克),  $n$  是所求箱数. 由题设可以将

$X_1, X_2, \dots, X_n$  视为独立同分布的随机变量, 而  $n$  箱的总重量

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  是独立同分布随机变量之和.

由题设, 有  $E(X_i) = 50, \sqrt{D(X_i)} = 5; E(S_n) = 50n, \sqrt{D(S_n)} = 5\sqrt{n}$  (单位: 千克)

根据列维—林德伯格中心极限定理, 知  $S_n$  近似服从正态分布  $N(50n, 25n)$  而箱数  $n$  根

据下述条件确定

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq 5000\} &= P\left\{\frac{S_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2) \end{aligned}$$

由此得

$$\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2,$$

从而  $n < 98.0199$ , 即最多可以装98箱.

十二、(本题满分13分)

设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合分布在以点  $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$  为顶点的三角形区域上服从均匀分布, 试求随机变量  $U = X + Y$  的方差.

【详解1】

三角形区域为  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \geq 1\}$ ,

随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{若}(x, y) \in G, \\ 0, & \text{若}(x, y) \notin G, \end{cases}$$

以  $f_1(x)$  表示  $X$  的概率密度, 则当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时,

$f_1(x) = 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{1-x}^1 2 dy = 2x.$$

因此

$$E(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}; E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2};$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

同理可得  $E(Y) = \frac{2}{3}, D(Y) = \frac{1}{18}$ .

下面求  $X$  和  $Y$  的协方差.

$$E(XY) = \iint_G 2xy dx dy = 2 \int_0^1 x dx \int_{1-x}^1 y dy = \frac{5}{12};$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36}.$$

于是  $D(U) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

### 【详解2】

三角形区域为  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \geq 1\}$ , 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{若}(x, y) \in G, \\ 0, & \text{若}(x, y) \notin G, \end{cases}$$

以  $f(u)$  表示  $U = X + Y$  的概率密度, 则当  $u < 1$  或  $u > 2$  时, 显然  $f(u) = 0$

设  $1 \leq u \leq 2$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  且  $0 \leq u - x \leq 1$  时,

$f(x, u - x) = 2$ , 否则  $f(x, u - x) = 0$

由随机变量之和的概率密度公式, 有

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u - x) dx = \int_{u-1}^1 2 dx = 2(2 - u).$$

即

$$f(u) = \begin{cases} 2(2 - u), & 1 \leq u \leq 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此  $E(X + Y) = E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2u(2 - u) du = 2 \int_1^2 u(2 - u) du = \frac{4}{3};$

$$E[(X+Y)^2] = E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u) du = 2 \int_1^2 u^2 (2-u) du = \frac{11}{6}.$$

$$D(u) = E(U^2) - [E(U)]^2 = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}.$$

FREEKAOYAN