2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$__________

【答】$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【详解】 $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(2)设函数$y=f(x)$由方程$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$所确定,则曲线$y=f(x)$在点(0,1)处的法线方程为__________.

【答】 $x-2y+2=0$.

【详解】在等式$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$两边对x求导,得

$$e^{2x+y}\cdot(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0,$$

将$x=0$, $y=1$代入上式,得$y'(0)=-2$.故所求法线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}x,$$

即 $x-2y+2=0$.

(3)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2x\right)\cos^2xdx=$__________

【答】$\dfrac{\pi}{8}$

【详解】 在区间$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上,$x^3\cos^2x$是奇函数,$\sin^2x\cos^2x$是偶函数,

故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2x\right)\cos^2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3\cos^2x+\sin^2x\cos^2x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2xdx$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

(4)过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为________.

【答】$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$

【详解】 方法一:

原方程$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$可改写为

$$\left(y\arcsin x\right)'=1,$$

两边直接积分,得

$$y\arcsin x=x+c.$$

又由$y(\frac{1}{2})=0,$解得$C=-\frac{1}{2}.$

故所求曲线方程为：

$$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$$

方法二:

将原方程写成一阶线性方程的标准形式

$$y'+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

解得$y=e^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}\left[C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}dx\right]=\frac{1}{\arcsin x}(C+x),$

又由$y(\frac{1}{2})=0,$解得$C=-\frac{1}{2}.$

故曲线方程为：

$$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$$

(5)设方程$\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$有无穷多个解,则$a=$________.

【答】 -2

【详解】 方法一:
利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形,有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & (a-1) & 3 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & 2(a+2) \end{array}\right],$$

可见,只有当$a=-2$ 时才有秩$r(\overline{A})=r(A)=2<3$,对应方程组有无穷多个解.

方法二:
当系数矩阵的行列式不为零时,方程组有唯一解,因此满足题设条件的a 一定使系数行列式为零,即有

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2=0,$$

解得$a=-2$ 或$a=1$.
由于答案有两个,应将其带回原方程进行检验.显然,当 $a=1$ 时,原方程无解,因此只能是 $a=-2$.

二、选择题

(1)设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\le 1, \\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$ 等于 （ B ）

（A）0 （B）1 （C）$\begin{cases}1, |x|\le 1, \\ 0, |x|>1,\end{cases}$ （D） $f(x)=\begin{cases}0, |x|\le 1, \\ 1, |x|>1,\end{cases}$

（2）设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^n}-1\right)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 （ B ）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

（3）曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 （ C ）

（A）0. （B）1. （C）2. （D）3

（4）已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则 （ A ）

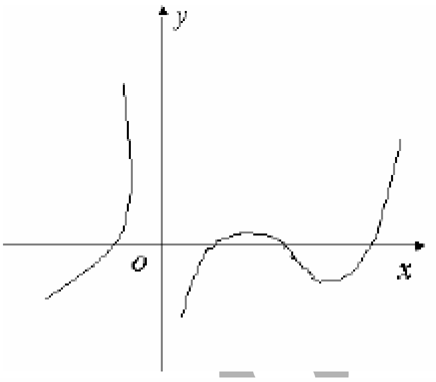
（A）在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

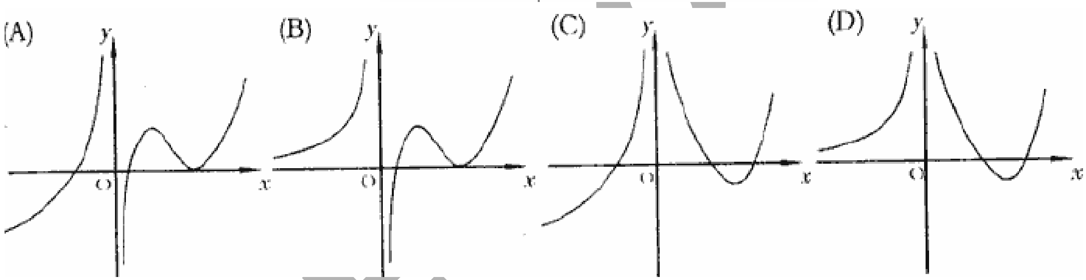
（B）在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

（C）在 $(1-\delta,1)$ 内， $f(x)<x$.在 $(1,1+\delta)$ 内， $f(x)>x$.

（D）在 $(1-\delta,1)$ 内， $f(x)>x$.在 $(1,1+\delta)$ 内， $f(x)<x$.

（5）设函数 f (x) 在定义域内可导，y= f(x) 的图形如右图所示，则导函数 y= f' (x) 的图形为 （ ）





三、求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $x=\tan u$, 则 $dx=\sec^2 u du$,

$$原式=\int \frac{du}{(2\tan^2 u+1)\cos u}=\int \frac{\cos u du}{2\sin^2 u+\cos^2 u}$$

$$=\int \frac{d\sin u}{\sin^2 u+1}$$

$$=\arctan(\sin u)+C$$

$$=\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$$

四、设函数 z = f(x,y)在点(1,1) 处可微，且

$f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)).$

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$

五、设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 使该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值。（在直角坐标系下曲率公式为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$）

解　$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}},y''=\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$

抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

抛物线上 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx.$$

故

$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x}.$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}(\frac{d\rho}{ds})\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{1+4x}}.$$

因此　$$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-(\frac{d\rho}{ds})^2=3\cdot\frac{1}{2}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{1+4x}}-36x=9.$$

六、计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz,$ 其中 **L** 是平面 **x+y+z=2** 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 **z** 轴正向看去，**L** 为逆时针方向.

七、设 y= f(x) 在(−1,1) 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0,$ 试证：

（1）对于(−1,1)内的任意 x ≠ 0, 存在唯一的$\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right]$ 成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

八、设有一高度为 h(t)(t 为时间)得雪堆再融化过程中，其侧面积满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

【解】记 V 为雪堆体积， S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}\left[h(t)^2-h(t)z\right]}dxdy$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h(t)^2-h(t)z\right]dz$$

$$=\frac{\pi}{4}h(t)^3$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h(t)^2}{2}}\sqrt{1+\left(Z_x^{'}\right)^2+\left(Z_y^{'}\right)^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{h(t)^2}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h(t)^2}}dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}rdr$$

$$=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt}=-0.9S(t),$ 将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得

$$\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{13}{10}$$

解得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$

由 h(0) = 130, 得

$$h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$$

令 h(t) → 0 得 t = 100 （小时）.
因此高度为 130 厘米得雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九、一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时?

十、设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$

十一、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E,$ 其中 E 是 3 阶单位阵，求 X .

解 由题设的关系式得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$

即

$$(A-B)X(A-B)=E.$$

由于行列式 $|A-B|=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0,$ 所以矩阵 $A-B$ 可逆,

而

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

十二、、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 为线性方程组 Ax = 0 的一个基础解系,

$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$, **试问实数 t 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4}$ 也为 Ax = 0 的一个基础解系.**

【解】逐个讨论基础解系应满足的三个条件.

1. $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 的线性组合，由齐次方程组解的性质知，对任意的实数 t，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 都是 Ax = 0 的解向量；

2. $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关；

将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 线性表出的关系表示成矩阵形式有

$$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]\begin{bmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{bmatrix}=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]C$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 线性无关，故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也线性无关 $\Leftrightarrow \left|C\right|=1-t^4\neq 0$, 即 $t\neq\pm 1$.

3. $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 向量个数正好是 4 个（与 t 无关）.

故当 $t\neq\pm 1$ 时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也是 Ax = 0 的基础解系