

2002 年全国硕士研究生入学统一考试

经济数学四试题详解及评析

一、填空题

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\quad}$.

【答】 $\frac{1}{1-2a}$

【详解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a) \cdot \frac{1}{1-2a}} = e^{\frac{1}{1-2a}}$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \ln e^{\frac{1}{1-2a}} = \frac{1}{1-2a}$.

(2) 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 则 $\int x f'(x) dx = \underline{\quad}$.

【答】 $2 \ln x - \ln^2 x + C$

【详解】 由题设 $f(x) = (\ln^2 x)' = \frac{2 \ln x}{x}$, 根据分布积分有

$$\begin{aligned} \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= \frac{2 \ln x}{x} - \ln^2 x + C = 2 \ln x - \ln^2 x + C. \end{aligned}$$

(3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 则 $B^{-1} = \underline{\quad}$.

【答】 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

【详解】 $B = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2E = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

所以 $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c)$, $\alpha_2 = (b, c, 0)$, $\alpha_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必须满足关

系式_____.

【答】 $abc \neq 0$

【详解】 三个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充要条件是行列式

$$\left| (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) \right| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0,$$

即 $abc \neq 0$

(5) 设随机变量 X, Y 的联合概率密度分布为

		Y		
	P			
	X			
		-1	0	1
	0	0.07	0.18	0.15
	1	0.08	0.32	0.20

则 X, Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

【答】 0

【详解】 由题设, 有

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.15 & 0.5 & 0.35 \end{pmatrix},$$

于是 $E(X) = 0.6, E(Y) = -1 \times 0.15 + 0 \times 0.5 + 1 \times 0.35 = 0.2,$

又 X, Y 的分布规律为

		Y		
	XY	-1	0	1
	P	0.08	0.72	0.20

于是 $E(XY) = -1 \times 0.08 + 0 \times 0.72 + 1 \times 0.20 = 0.12,$

从而 $Cov(X, Y) = E(X, Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0.12 - 0.6 \times 0.2 = 0,$

$$\text{故相关系数 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0.$$

二、选择题

(1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 在开区间 (a, b) 上可导, 则

- (A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.
 (B) 对任何 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$.
 (C) 对 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$
 (D) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

【答】 [B]

【详解】 由题设, $f(x)$ 在 $\xi (\xi \in (a, b))$ 处可导, 从而连续,

$$\text{故有 } \lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0. \text{ 应选(B).}$$

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 则在下列变上限积分定义的函数中, 必为偶函数的是

- (A) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$. (B) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$.
 (C) $\int_0^x f(t^2)dt$. (D) $\int_0^x f^2(t)dt$.

【答】 [A]

【详解】 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性与 $f(x)$ 的奇偶性的关系是:

若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 为奇函数;

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 为偶函数.

题设四个选项中 $t[f(t) + f(-t)]$ 为奇函数,

故 $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$ 必为偶函数 所以, 应选(A).

(3) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,

则 C 的伴随矩阵 $C^* =$

$$(A) \begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$$

【答】 [D]

【详解】 若 A, B 均可逆, 则

$$A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1},$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } C^* &= |C|C^{-1} = |A||B| \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = |A||B| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对比四个选项知, 只有(D)成立.

当 A 或 B 不可逆时, 利用定义可证(D)仍成立..

(4) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.
- (B) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布密度
- (C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布密度
- (D) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

【答】 [B]

【详解】 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = 2 \neq 1$ 知, 可排除(A);

$$\text{又如 } f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{但 } f_1(x)f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 不能作为某一随机的概率密度, 可排除(D);}$$

$$F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 1 + 1 = 2 \neq 1, \text{ 可排除(C).}$$

故(B)为正确选项.

(5) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立分布, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维—林德伯格 (Levy-Lindberg) 中心极限定理, 当 n 充分大, S_n 近似服从正态分布, 只要 X_1, X_2, \dots, X_n

- (A) 有相同的数学期望. (B) 有相同的方差.
(C) 服从同一指数分布. (D) 服从同一离散型分布.

【答】 [C]

【详解】 根据列维—林德伯格定理的条件, 要求 X_1, X_2, \dots, X_n 独立分布, 且 $E(X_i)$ 与 $D(X_i)$ 均存在, (A)(B) 两项不能保证同分布, 可排除; (D) 项服从同一离散型分布, 但不能保证 EX_i, DX_i 存在, 也可排除; 只有 (C) 为正确选项.

三、(本题满分 8 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)}$$

【详解】 方法一:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan(1+t) dt}{1-\cos x + x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \arctan(1+x^2)}{\sin x + \sin x + x \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \arctan(1+x^2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2 \sin x}{x} + \cos x} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x(1-\cos x)} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt] du}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan(1+x^2)}{6x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

四、(本题满分8分)

设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数,且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定,求 du

【详解1】 设 $F(x, y, z) = xe^x - ye^y - ze^z$, 则

$$F'_x = (x+1)e^x, F'_y = -(y+1)e^y, F'_z = -(z+1)e^z.$$

$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{x+1}{z+1}e^{x-z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{y+1}{z+1}e^{y-z},$$

$$\text{而 } \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + f'_z \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x + f'_z \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z},$$

$$\text{所以 } du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx + (f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy.$$

【详解2】 在 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两边微分,得

$$e^x dx + xe^x dx - e^y dy - ye^y dy = e^z dz + ze^z dz,$$

$$\text{故 } dz = \frac{(1+x)e^x dx - (1+y)e^y dy}{(1+z)e^z}.$$

由 $u = f(x, y, z)$, 得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz,$$

$$\text{故 } du = (f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1}e^{x-z})dx + (f'_y + f'_z \frac{y+1}{z+1}e^{y-z})dy.$$

五、(本题满分8分)

设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$

【详解】 令 $u = \sin^2 x$, 则有

$$\sin x = \sqrt{u}, x = \arcsin \sqrt{u}, f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{于是}$$

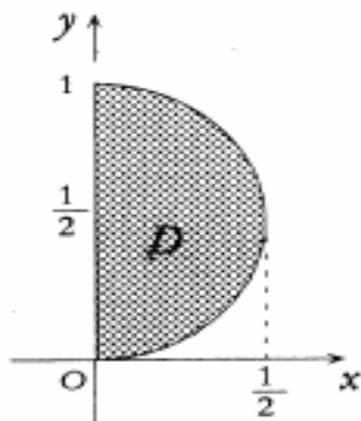
$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= -\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) = -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x} \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

六、(本题满分9分)

设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$. $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) dudv,$$

求 $f(x, y)$



【详解】 设 $\iint_D f(u, v) dudv = A$, 在已知等式两边求区域 D 上的二重积分, 有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \frac{8A}{\pi} \iint_D dx dy,$$

$$\text{从而 } A = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - A.$$

$$\text{所以 } 2A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1-r^2} \cdot r dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) d\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{故 } A = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{于是 } f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

七、(本题满分9分)

设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数: $Q = Q(p)$, 其需求弹性 $\eta = \frac{2p^2}{192-p^2} > 0$.

(1) 设 R 为总收益函数, 证明 $\frac{dR}{dp} = Q(1-\eta)$.

(2) 求 $p = 6$ 时, 总收益对价格的弹性, 并说明其经济意义.

【详解】 (1) $R(p) = pQ(p)$.

上式两边对 p 求导, 得

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q \left(1 + \frac{p}{Q} \frac{dR}{dp} \right) = Q(1-\eta).$$

$$(2) \frac{ER}{Ep} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = \frac{p}{pQ} Q(1-\eta)$$

$$= 1 - \eta = 1 - \frac{2p^2}{192-p^2} = \frac{192-3p^2}{192-p^2}$$

$$\left. \frac{ER}{Ep} \right|_{p=6} = \frac{192-3 \times 6^2}{192-6^2} = \frac{7}{13} \approx 0.54.$$

经济意义: 当 $p = 6$ 时, 若价格上涨 1%, 则总收益将增加 0.54%.

八、(本题满分8分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质, 证明

存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

【详解】因为 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 由最值定理, 知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 即

$$m \leq f(x) \leq M,$$

故 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx,$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

由介值定理知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

九、(本题满分 13 分)

设四元齐次方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组(I)与(II)有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

【详解】方法一:

(1) 对方程组(I)的系数矩阵作行初等变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

得方程组(I)的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

由此可得方程组(I)的一个基础解系为

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

(2) 由题设条件,方程组(II)的全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ (a+2)k_1 + 4k_2 \\ k_1 + (a+8)k_2 \end{bmatrix}, (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}),$$

将上式代入方程组(I),得

$$\begin{cases} (a+1)k_1 = 0 \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0 \end{cases}$$

要使方程组(I)(II)有非零公共解,只需关于 k_1, k_2 的方程组²有非零解.

$$\text{因为 } \begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2,$$

所以,当 $a \neq -1$ 时,方程组(I)与(II)无非零公共解.

当 $a = -1$ 时,方程组²有非零解,且 k_1, k_2 为不全为零的任意常数,此时,由¹可得方程

组(I)与(II)的全部非零公共解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, (k_1, k_2 \text{ 为不全为零的任意常数}).$$

方法二:

(1) 对方程组(I)的系数矩阵作用初等变换,有.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

得方程组(I)的同解方程组

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

由此可得方程组(I)的一个基础解系为

$$\beta_1 = (1, 0, 2, 3)^T, \beta_2 = (0, 1, 3, 5)^T.$$

(2) 设方程组(I)与(II)的公共解为 η , 则有 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得

$$\eta = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_3\alpha_1 + k_4\alpha_2.$$

由此解得线性方程组

$$(III) \begin{cases} -k_1 + 2k_3 - k_4 = 0, \\ -k_2 - k_3 + 2k_4 = 0, \\ -2k_1 - 3k_2 + (a+2)k_3 + 4k_4 = 0, \\ -3k_1 - 5k_2 + k_3 + (a+8)k_4 = 0 \end{cases}$$

对方程组(III)的系数矩阵作行初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 \\ -3 & -5 & 1 & a+8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}.$$

由此可知,

当 $a \neq -1$ 时, 方程组(III)仅有零解, 故方程组(I)与(II)无非零公共解.

当 $a = -1$ 时, 方程组(III)的同解方程为

$$\begin{cases} k_1 = 2k_3 - k_4, \\ k_2 = -k_3 + 2k_4, \end{cases}$$

令 $k_3 = c_1, k_4 = c_2$, 得方程组(I)与(II)的非零公共解为

$$\eta = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, (c_1, c_2 \text{ 为不全为零的任意常数}).$$

十、(本题满分 13 分)

设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角型矩阵, 并计算行列

式 $|A - E|$ 的值..

【详解】 矩阵 A 的特征多项式

$$|A-E| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2).$$

由此得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = a+1$, 可得对应的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T.$$

对于特征值 $\lambda_3 = a-2$, 可得对应的特征向量

$$\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$$

令矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix},$

则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix}.$

由 A 的特征值可得 $A-E$ 的特征值为 $a, a, a-3$,

所以, $|A-E| = a^2(a-3).$

十一、(本题满分 13 分)

设 A, B 是任意二事件, 其中 A 的概率不等于 0 和 1, 证明 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

【详解】 必要性.

由事件 A 与 B 独立, 知事件 \bar{A} 与 B 也独立,

因此 $P(B|A) = P(B|\bar{A}).$

充分性.

由 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P\bar{A}} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)},$$

$$P(AB)[1 - P(A)] = P(A)P(B) - P(A)P(AB),$$

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

因此 A 与 B 独立.

十二、(本题满分 13 分)

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作的时间 (EX) 为 5 小时. 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

【详解】 设 X 的分布参数为 λ . 由于 $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$, 可见 $\lambda = \frac{1}{5}$.

显然 $Y = \min\{X, 2\}$.

对于 $y < 0$, $F(y) = 0$; 对于 $y \geq 2$, $F(y) = 1$.

设 $0 \leq y < 2$, 有

$$F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\frac{y}{5}}$$

于是, Y 的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$