

## 2002 年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一试题详解及评析

### 一、填空题

(1)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 1.

【详解】

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = -(0-1) = 1.$$

(2) 已知函数  $y = y(x)$  由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  确定, 则  $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 -2.

【详解】

将方程两边对  $x$  求导, 视  $y$  为  $x$  的函数, 得

$$e^y y' + 6xy' + 6y + 2x = 0, \tag{1}$$

再对  $x$  求导,  $y, y'$  均视为  $x$  的函数, 得

$$e^y y'' + e^y (y')^2 + 6xy'' + 12y' + 2 = 0, \tag{2}$$

当  $x=0$  时, 由原方程知  $y=0$ , 再以  $x=0, y=0$  代入 (1) 式中得  $y'(0)=0$ , 再代入 (2)

式中得  $y''(0) = -2$ .

(3) 微分方程  $yy'' + y'^2 = 0$  满足初始条件  $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$  的特解是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】  $y = \sqrt{x+1}$  或  $y^2 = x+1$

【详解】

令  $y' = p$ , 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

原方程可化为

$$yp \frac{dy}{dp} + p^2 = 0$$

于是  $p=0$  或  $yp \frac{dy}{dp} + p = 0$

前者显然不满足初始条件  $y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ ，因此必有  $yp \frac{dy}{dp} + p = 0$ ，积分得

$$py = C_1, \text{ 即 } y \frac{dy}{dx} = C_1.$$

由初始条件  $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$  得  $C_1 = \frac{1}{2}$ ，于是

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2},$$

即  $y dy = \frac{1}{2}$

积分得

$$y^2 = x + C_2.$$

再由初始条件  $y|_{x=0} = 1$ ，得  $C_2 = 1$ . 故所求特解为

$$y^2 = x + 1 \text{ 或 } y = \sqrt{x+1}$$

(4) 已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  经正文变换

$x = Py$ ，可化标准形  $f = 6y_1^2$ ，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答】 2.

【详解1】二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

所对应矩阵为  $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$ ,

标准形  $f = 6y_1^2$  所对应矩阵为  $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

根据题设知  $A, B$  为相似矩阵，所以  $A, B$  的特征值相同，可见  $A$  的三个特征值为  $6, 0, 0$ . 而

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} \\ &= [\lambda - (a+4)][\lambda - (a-2)]^2 \end{aligned}$$

可见  $a+4=6, a-2=0$ ,

故有  $a=2$

【详解2】由  $A, B$  为相似矩阵知，对应特征多项式相同，即

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$$

于是有

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{aligned} [\lambda - (a+4)][\lambda - (a-2)]^2 &= \lambda^3 - 6\lambda^2 \\ \lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3(a^2 - 4)\lambda - (a+4)(a-2)^2 &= \lambda^3 - 6\lambda^2, \end{aligned}$$

比较同次幂的系数知  $a = 2$

(5) 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ )；且二次方程  $y^2 + 4y + X = 0$  无实根的概率为  $\frac{1}{2}$ ，则  $\mu = \underline{\quad}$ 。

【答】 4

【详解】

二次方程  $y^2 + 4y + X = 0$  无实根的充要条件是  $4 - X < 0$ 。故由条件知有  $P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= P\{X > 4\} = 1 - P\{X \leq 4\} = 1 - P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= 1 - P\left\{Y \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= 1 - \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

于是  $\Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4 - \mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow \mu = 4$ 。

## 二、选择题

(1) 考虑二元函数  $f(x, y)$  的下面 4 条性质：

$f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续；

$f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数连续；

$f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微；

$f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数存在.

若用 “ $P \Rightarrow Q$ ” 表示可由性质  $P$  推出  $Q$ ，则有

(A)  $\Rightarrow \Rightarrow$

(B)  $\Rightarrow \Rightarrow$

(C)  $\Rightarrow \Rightarrow$

(D)  $\Rightarrow \Rightarrow$

【 】

【答】 应选 (A)

【详解】 若  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数连续，则  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微，而可微又必联系，因此有  $\Rightarrow \Rightarrow$ ，故应选 (A)。

(2) 设  $u_n \neq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ ，则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

发散.

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

【 】

【答】 应选 (C)

【详解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ ，知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{u_n} = 0,$$

又原级数的前  $n$  项部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left( \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left( \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) + \dots + (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}} \end{aligned}$$

可见有  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ ，因此原级数收敛，排除 (A), (D)，再考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{u_{n+1}} = 1$ ,

所以有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_{n+1}}$ , 均发散, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$  也发散, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

条件收敛, 应选 (C)

(3) 设函数  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界且可导, 则

(A) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

【 】

【答】 应选 (B)

【详解 1】

设  $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界, 由于

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

可见  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导, 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  不存在,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \neq 0$ , 排除 (A), (D)

又设  $f(x) = \sin x$ , 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界且可导,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

但  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \neq 0$

进一步排除 (C), 故应选 (B).

【详解 2】

直接证明 (B) 正确, 用反证法, 由题设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \neq 0$ , 不妨设  $A > 0$ ,

则对于  $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ , 存在  $X > 0$ , 当  $x > X$  时, 有

$$|f'(x) - A| < \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

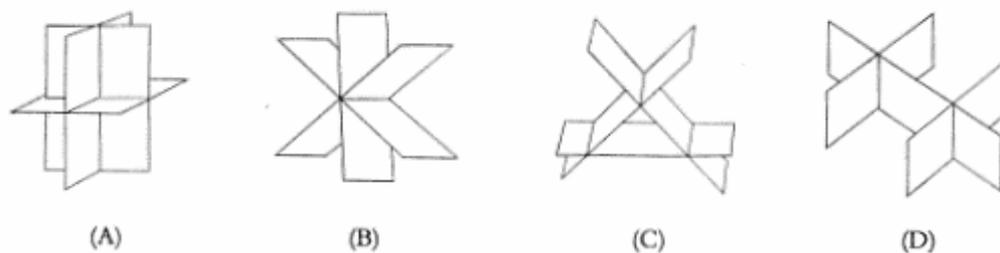
即  $\frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < f'(x) < A + \frac{A}{2}$ ,

可见  $f'(x) > \frac{A}{2}$ , 在区间  $[X, x]$  上应用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(x) = f'(X) + f'(\zeta)(x - X) > f'(X) + \frac{A}{2}(x - X)$$

于是, 与题设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界矛盾, 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(4) 设有三张不同平面的方程  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$ , 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 2, 则这三张平面可能的位置关系为



【 】

【答】 应选 (B)

【详解】 由题设, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

系数矩阵和增广矩阵的秩相等且为 2, 由非齐次线性方程组解的判定定理知, 此方程有无穷多组解, 即三平面有无穷多个交点, 对照四个选项, (A) 只有一个交点; (C), (D) 无交点, 因此只有 (B) 符合要求.

(5) 设  $X_1$  和  $X_2$  是任意两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$ , 分布函数分别为  $F_1(x)$  和  $F_2(x)$ , 则

(A)  $f_1(x) + f_2(x)$  必为某一随机变量的概率密度.

(B)  $f_1(x)f_2(x)$  必为某一随机变量的概率密度.

(C)  $F_1(x) + F_2(x)$  必为某一随机变量的分布函数

(D)  $F_1(x)F_2(x)$  必为某一随机变量的分布函数.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = 2 \neq 1, F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 2 \neq 1, \text{因此可先排除 (A), (C)}$$

$$\text{又设 } f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f_1(x)f_2(x) = \begin{cases} 2e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

显然不满足概率密度函数的要求，进一步排除 (B)，故应选 (D)。

事实上，可检验  $F_1(x)F_2(x)$  却是满足分布函数的三个条件。

三、设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内具有一阶连续导数，且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$ ，若

$af(h)+bf(2h)-f(0)$  在  $h \rightarrow 0$  时是比  $h$  高阶的无穷小，试确定  $a, b$  的值。

【详解 1】

由题设，知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h} = 0$$

于是

$$\lim_{h \rightarrow 0} [af(h)+bf(2h)-f(0)] = (a+b-1)f(0) = 0.$$

由于  $f(0) \neq 0$ ，故必有

$$a+b-1=0$$

又由洛比达法则，有

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1} = (a+2b)f'(0)$$

因  $f'(0) \neq 0$ ，故  $a+2b=0$ ，

于是可解得  $a=2, b=-1$

【详解 2】 由题设条件

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a[f(h)-f(0)]}{h} + \frac{2b[f(h)-f(0)]}{2h} + \frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{h} \right\} \end{aligned}$$

若上式右端第 3 项分子不为零，则上式得极限不存在，与左边为零矛盾，所以

$$af(0)+bf(0)-f(0) = (a+b-1)f(0) = 0$$

从而  $a+b-1=0$ ，于是原式可化为

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{a[f(h) - f(0)]}{h} + \frac{2b[f(h) - f(0)]}{2h} \right\} \\
&= af'(0) + 2bf'(0) \\
&= (a + 2b)f'(0)
\end{aligned}$$

有  $a + 2b = 0$  ,

解得  $a = 2, b = -1$

四、已知两曲线  $y = f(x)$ ,  $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2}$  在点  $(0, 0)$  处的切线相同, 写出此切线方程, 并求

极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$

【详解】 由已知条件得  $f(0) = 0$  , 且

$$f'(0) = \frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1,$$

故所求切线方程为  $y = x$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2.$$

五、计算二重积分  $\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

【详解】 设

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

于是

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy &= \iint_{D_1} e^{\max(x^2, y^2)} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max(x^2, y^2)} dx dy \\
&= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = e - 1
\end{aligned}$$

六、设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数， $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内的有向分段光滑曲线，其起点为  $(a, b)$ ，终点为  $(c, d)$ ，记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$$

(1) 证明曲线积分  $I$  与路径  $L$  无关；

(2) 当  $ab = cd$  时，求  $I$  的值.

【详解】(1) 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} \end{aligned}$$

在上半平面处成立，所以在上半平面内曲线积分  $I$  与路径  $L$  无关；

(2) 由于  $I$  与路径无关，故可取积分路径  $L$  为由点  $(a, b)$  到点  $(c, b)$  再到点  $(c, d)$  的折线段，

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c bf(bx) dx + \int_b^d cf(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt \end{aligned}$$

当  $ab = cd$  时， $\int_{ab}^{cd} f(t) dt = 0$ ，由此得

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

七、(1) 验证函数  $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 满足微分方程

$$y'' + y' + y = e^x;$$

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  的和函数.

【详解】(1) 因为

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \cdots,$$

$$y'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \cdots,$$

$$y''(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \cdots,$$

于是

$$y'' + y' + y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x;$$

(2) 对应齐次微分方程  $y'' + y' + y = 0$  的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

特征根是  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , 由于  $a=1$  不是特征根, 可设非齐次微分方程的特解为

$$y^* = Ae^x$$

将  $y^*$  代入方程  $y'' + y' + y = e^x$  得  $A = \frac{1}{3}$ , 于是  $y^* = \frac{1}{3}e^x$

故非齐次微分方程得通解为

$$y = \frac{1}{3}e^x + C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

又显然  $y(x)$  满足初始条件  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

代入上式得  $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$ .

故所求幂级数的各函数为

$$y = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

八、设有一小山, 取它的底面所在的平面为  $xOy$  坐标面, 其底部所占的区域为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}, \text{ 小山的高底函数为 } h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy.$$

(1) 设  $M(x_0, y_0)$  为区域  $D$  上一点, 问  $h(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?

若记此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山度最大的点作为攀登的起点,

也就是说,要在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上找出使  $g(x, y)$  达到最大值的点,试确定攀登起点的位置.

【详解】

(1) 根据梯度与方向导数的关系知,沿梯度方向导数值最大,且其值为

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0) &= |\text{grad}h_M| = |(y_0 - 2x_0)i + (x_0 - 2y_0)j| \\ &= \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} \\ &= \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0} \end{aligned}$$

(2) 由题设,问题转化为求  $g(x_0, y_0) = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}$  下的最大值,为了求偏导方便起见,令  $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ , 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(5x^2 + 5y^2 - 8xy)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0 \quad (3)$$

(1) 与 (2) 相加得

$$(x + y)(2 - \lambda) = 0.$$

从而得  $y = -x$ , 或  $\lambda = 2$

若  $\lambda = 2$ , 由 (1) 得  $y = x$ , 再由 (3) 得

$$x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}$$

若  $y = -x$ , 由 (3) 得  $x = \pm 5, y = \mp 5$

于是得到 4 个可能极值点:

$$M_1(5, -5); M_2(-5, 5); M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}); M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

分别计算, 有

$$f(M_1) = f(M_2) = 450; f(M_3) = f(M_4) = 150.$$

可见点  $M_1$  或  $M_2$  可作为攀登的起点.

九、已知 4 阶方阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$   $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为 4 维列向量, 其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无

关,  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ , 如果  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 求线性方程组  $Ax = \beta$  的通解.

【详解 1】

$$\text{令 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ 则由,}$$

$$\text{得 } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

将  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$  代入上式, 整理后得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【详解 2】

由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关和  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4$ , 知  $A$  的秩为 3, 因此  $Ax = 0$  的基础解系中只包含一个向量.

由  $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$ , 知  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  为齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个解,

所以其通解为

$$x = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

再由  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ , 知  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$  为非齐次线性方程组

$Ax = \beta$  的一个特解,

于是  $Ax = \beta$  的通解为

$$x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

十、设  $A, B$  为同阶方阵,

- (1) 如果  $A, B$  相似, 试证  $A, B$  的特征多项式相等;
- (2) 举一个二阶方阵的例子说明 (1) 的逆命题不成立;
- (3) 当  $A, B$  均为实对称矩阵时, 试证 (1) 的逆命题成立.

【详解】(1) 若  $A, B$  相似, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ , 故

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}| |\lambda E - A| |P| \\ &= |\lambda E - A| \end{aligned}$$

(2) 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  则

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2$$

但  $A, B$  不相似, 否则, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $B = P^{-1}AP = P^{-1}P = E$ , 矛盾.

(3) 由  $A, B$  均为实对称矩阵知,  $A, B$  均象素于对角阵, 若  $A, B$  得特征多项式相等, 记特征多项式得根为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 则有

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^{-1}BQ$$

于是  $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B$ .

故  $A, B$  为相似矩阵.

十一、设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{对 } X \text{ 独立地重复观察 } 4 \text{ 次, 用 } Y \text{ 表示观察值大于 } \frac{\pi}{3} \text{ 的次数,}$$

求  $Y^2$  的数学期望.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} P\left\{X > \frac{\pi}{3}\right\} &= 1 - P\left\{X \leq \frac{\pi}{3}\right\} = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx \\ &= 1 - \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以  $Y \sim B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , 从而

$$E(Y) = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$D(Y) = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1,$$

故  $E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = 1 + 2^2 = 5$

十二、设总体  $X$  的概率分布为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$	$1-2\theta$

其中  $\theta \left(0 < \theta < \frac{1}{2}\right)$  是未知参数, 利用总体  $X$  的如下样本值  $3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3$ , 求  $\theta$  的

矩估计值和最大似然估计值.

【详解】

$$E(X) = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3 - 4\theta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \times (3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$$

令  $E(X) = \bar{x}$ ,

$$\text{即} \quad 3 - 4\theta = 2,$$

$$\text{得 } \theta \text{ 的矩估计值为} \quad \bar{\theta} = \frac{1}{4}$$

对于给定的样本值, 似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P\{X_1=3, X_2=1, X_3=3, X_4=0, X_5=3, X_6=1, X_7=2, X_8=3\} \\ &= \theta^2 [2\theta(1-\theta)]^2 \theta^2 (1-2\theta)^4 \\ &= 4\theta^6 (1-\theta)^2 (1-2\theta)^4 \end{aligned}$$

则

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6 \ln \theta + 2 \ln(1-\theta) + 4 \ln(1-2\theta),$$

那么

$$\frac{d \ln \theta}{d \theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln \theta}{d \theta} = 0, \text{ 解得 } \theta_{1,2} = \frac{1}{12}(7 \pm \sqrt{13}),$$

但  $\theta = \frac{1}{12}(7 + \sqrt{13}) > \frac{1}{2}$ , 不合题意,

故  $\theta$  的最大似然估计值

$$\theta = \frac{1}{12}(7 + \sqrt{13})$$