

2003 年考研数学（三）真题评注

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} x^\lambda \cos \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续, 则 λ 的取值范围是.

(2) 已知曲线 $y = x^3 - 3a^2x + b$ 与 x 轴相切, 则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2 =$

(3) 设 $a > 0$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} a, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 而 D 表示全平面, 则

$$I = \iint_D f(x)g(y-x)dxdy = \quad .$$

(4) 设 n 维向量 $\alpha = (a, 0, \Lambda, 0, a)^T, a < 0$; E 为 n 阶单位矩阵, 矩阵

$$A = E - \alpha\alpha^T, \quad B = E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B , 则 $a =$ _____.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为 _____.

(6) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, X_1, X_2, Λ, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

- (A) 在 $x=0$ 处左极限不存在. (B) 有跳跃间断点 $x=0$.
 (C) 在 $x=0$ 处右极限不存在. (D) 有可去间断点 $x=0$. []

(2) 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则下列结论正确的是

- (A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零. (B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零.
 (C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零. (D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在.

[]

(3) 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}, n = 1, 2, \Lambda$, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
- (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
- (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定.
- (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定. []

(4) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩为 1, 则必有

- (A) $a=b$ 或 $a+2b=0$. (B) $a=b$ 或 $a+2b \neq 0$.
 (C) $a \neq b$ 且 $a+2b=0$. (D) $a \neq b$ 且 $a+2b \neq 0$. []

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 均为 n 维向量, 下列结论不正确的是

- (A) 若对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关.
- (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性相关, 则对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s = 0$.
- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关. []

(6) 将一枚硬币独立地掷两次, 引进事件: $A_1 = \{\text{掷第一次出现正面}\}$, $A_2 = \{\text{掷第二次出现正面}\}$, $A_3 = \{\text{正、反面各出现一次}\}$, $A_4 = \{\text{正面出现两次}\}$, 则事件

- (A) A_1, A_2, A_3 相互独立. (B) A_2, A_3, A_4 相互独立.
 (C) A_1, A_2, A_3 两两独立. (D) A_2, A_3, A_4 两两独立. []

三、(本题满分 8 分)

设

$$f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又 $g(x, y) = f[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)]$,

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ ($|x| < 1$) 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x), \quad \text{且 } f(0) = 0, \quad f(x) + g(x) = 2e^x.$$

- (1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;
- (2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$. 试证必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \Lambda + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + a_3x_3 + \Lambda + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + (a_3 + b)x_3 + \Lambda + a_nx_n = 0, \\ \Lambda \quad \Lambda \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \Lambda + (a_n + b)x_n = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. 试讨论 a_1, a_2, Λ, a_n 和 b 满足何种关系时,

- (1) 方程组仅有零解;
- (2) 方程组有非零解. 在有非零解时, 求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 (b > 0),$$

中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为-12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x^2}}, & \text{若 } x \in [1,8], \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

F(x)是 X 的分布函数. 求随机变量 Y=F(X)的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 f(y), 求随机变量 U=X+Y 的概率密度 g(u).

1. 【分析】 当 $x \neq 0$ 可直接按公式求导, 当 $x=0$ 时要求用定义求导.

【详解】 当 $\lambda > 1$ 时, 有

$$f'(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1} \cos \frac{1}{x} + x^{\lambda-2} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

显然当 $\lambda > 2$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, 即其导函数在 $x=0$ 处连续.

【评注】 原题见《考研数学大串讲》P.21 【例 5】(此考题是例 5 的特殊情形).

2. 【分析】 曲线在切点的斜率为 0, 即 $y' = 0$, 由此可确定切点的坐标应满足的条件,

再根据在切点处纵坐标为零, 即可找到 b^2 与 a 的关系.

【详解】 由题设, 在切点处有

$$y' = 3x^2 - 3a^2 = 0, \text{ 有 } x_0^2 = a^2.$$

又在此点 y 坐标为 0, 于是有

$$0 = x_0^3 - 3a^2 x_0 + b = 0,$$

故 $b^2 = x_0^2(3a^2 - x_0^2)^2 = a^2 \cdot 4a^4 = 4a^6$.

【评注】 有关切线问题应注意斜率所满足的条件, 同时切点还应满足曲线方程. 完全类似例题见《文登数学全真模拟试卷》数学四 P.36 第一大题第 (3) 小题.

3. 【分析】 本题积分区域为全平面, 但只有当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1$ 时, 被积函数才不为零, 因此实际上只需在满足此不等式的区域内积分即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } I &= \iint_D f(x)g(y-x)dx dy = \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y-x \leq 1} a^2 dx dy \\ &= a^2 \int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy = a^2 \int_0^1 [(x+1) - x] dx = a^2. \end{aligned}$$

【评注】 若被积函数只在某区域内不为零, 则二重积分的计算只需在积分区域与被积函数不为零的区域的公共部分上积分即可.

完全类似例题见《数学复习指南》P.191 【例 8.16-17】.

4. 【分析】 这里 $\alpha \alpha^T$ 为 n 阶矩阵, 而 $\alpha^T \alpha = 2a^2$ 为数, 直接通过 $AB = E$ 进行计算并注意利用乘法的结合律即可.

【详解】 由题设, 有

$$\begin{aligned} AB &= (E - \alpha \alpha^T) \left(E + \frac{1}{a} \alpha \alpha^T \right) \\ &= E - \alpha \alpha^T + \frac{1}{a} \alpha \alpha^T - \frac{1}{a} \alpha \alpha^T \cdot \alpha \alpha^T \\ &= E - \alpha \alpha^T + \frac{1}{a} \alpha \alpha^T - \frac{1}{a} \alpha (\alpha^T \alpha) \alpha^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E - \alpha\alpha^T + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - 2a\alpha\alpha^T \\
 &= E + (-1 - 2a + \frac{1}{a})\alpha\alpha^T = E,
 \end{aligned}$$

于是有 $-1 - 2a + \frac{1}{a} = 0$, 即 $2a^2 + a - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}, a = -1$. 由于 $A < 0$, 故 $a = -1$.

【评注】完全类似例题见《数学复习指南》P.305 第 2 大题第 (5) 小题.

5.. 【分析】利用相关系数的计算公式即可.

【详解】因为

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(Y, Z) &= \text{cov}(Y, X - 0.4) = E[(Y(X - 0.4))] - E(Y)E(X - 0.4) \\
 &= E(XY) - 0.4E(Y) - E(Y)E(X) + 0.4E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) = \text{cov}(X, Y),
 \end{aligned}$$

且 $DZ = DX$.

$$\text{于是有 } \text{cov}(Y, Z) = \frac{\text{cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho_{XY} = 0.9.$$

【评注】注意以下运算公式: $D(X + a) = DX$, $\text{cov}(X, Y + a) = \text{cov}(X, Y)$.

完全类似例题见《数学复习指南》P.475 【例 3.32】的【注】.

6.. 【分析】本题考查大数定律: 一组相互独立且具有有限期望与方差的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n , 当方差一致有界时, 其算术平均值依概率收敛于其数学期望的算术平均值:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \quad (n \rightarrow \infty).$$

【详解】这里 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 满足大数定律的条件, 且

$$EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 因此根据大数定律有}$$

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 依概率收敛于 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{2}.$$

【评注】大数定律见《数学复习指南》P.484.

二、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

7. 【分析】由题设, 可推出 $f(0) = 0$, 再利用在点 $x = 0$ 处的导数定义进行讨论即可.

【详解】显然 $x = 0$ 为 $g(x)$ 的间断点, 且由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知, $f(0) = 0$.

于是有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ 存在, 故 $x = 0$ 为可去间断点.

【评注 1】本题也可用反例排除, 例如 $f(x) = x$, 则此时 $g(x) = \frac{x}{x} = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 可排除

(A),(B),(C) 三项, 故应选(D).

【评注 2】 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A \Leftrightarrow f(x_0) = 0, f'(x_0) = A$.

本题事实上相当于考查此结论, 详情可参见《考研数学大串讲》P.18 的重要结论与公式.

8. **【分析】** 可微必有偏导数存在, 再根据取极值的必要条件即可得结论.

【详解】 可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 根据取极值的必要条件知 $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 即 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零, 故应选(A).

【评注 1】 本题考查了偏导数的定义, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数即 $f'_y(x_0, y_0)$; 而 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数即 $f'_x(x_0, y_0)$.

【评注 2】 本题也可用排除法分析, 取 $f(x, y) = x^2 + y^2$, 在 $(0, 0)$ 处可微且取得极小值, 并且有 $f(0, y) = y^2$, 可排除(B),(C),(D), 故正确选项为(A).

9. **【分析】** 根据绝对收敛与条件收敛的关系以及收敛级数的运算性质即可找出答案.

【详解】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当然也有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 再根据

$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ 及收敛级数的运算性质知, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛, 故应选

(B).

【评注】 完全类似例题见《文登数学全真模拟试卷》数学三 P.23 第二大题第(3)小题.

10. **【分析】** A 的伴随矩阵的秩为 1, 说明 A 的秩为 2, 由此可确定 a, b 应满足的条件.

【详解】 根据 A 与其伴随矩阵 A^* 秩之间的关系知, 秩(A)=2, 故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a + 2b)(a - b)^2 = 0, \text{ 即有 } a + 2b = 0 \text{ 或 } a = b.$$

但当 $a = b$ 时, 显然秩(A) \neq 2, 故必有 $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. 应选(C).

【评注】 n ($n \geq 2$) 阶矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 的秩之间有下列关系:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n - 1, \\ 0, & r(A) < n - 1. \end{cases}$$

完全类似例题见《数学复习指南》P.329 **【例 3.31】**.

11. **【分析】** 本题涉及到线性相关、线性无关概念的理解, 以及线性相关、线性无关

的等价表现形式. 应注意是寻找不正确的命题.

【详解】 (A): 若对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 必线性无关, 因为若 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性相关, 则存在一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s = 0$, 矛盾. 可见 (A) 成立.

(B): 若 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性相关, 则存在一组, 而不是对任意一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s = 0$. (B) 不成立.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关, 则此向量组的秩为 s ; 反过来, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 的秩为 s , 则 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关, 因此 (C) 成立.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关, 则其任一部分组线性无关, 当然其中任意两个向量线性无关, 可见 (D) 也成立.

综上所述, 应选 (B).

【评注】 原命题与其逆否命题是等价的. 例如, 原命题: 若存在一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性相关. 其逆否命题为: 若对于任意一组不全为零的数 k_1, k_2, Λ, k_s , 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \Lambda + k_s\alpha_s \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_s$ 线性无关. 在平时的学习过程中, 应经常注意这种原命题与其逆否命题的等价性.

与本题完全类似例题见《数学复习指南》P.313 **【例 3.4】**.

12. **【分析】** 按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可, 注意应先检查两两独立, 若成立, 再检验是否相互独立.

【详解】 因为

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2}, \quad P(A_4) = \frac{1}{4},$$

$$\text{且 } P(A_1A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_1A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2A_4) = \frac{1}{4}, \quad P(A_1A_2A_3) = 0,$$

可见有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \quad P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3), \quad P(A_2A_4) \neq P(A_2)P(A_4).$$

故 A_1, A_2, A_3 两两独立但不相互独立; A_2, A_3, A_4 不两两独立更不相互独立, 应选 (C).

【评注】 本题严格地说应假定硬币是均匀的, 否则结论不一定成立.

本题考查两两独立与相互独立的差异，其要点可参见《数学复习指南》P.401.

13.. 【分析】 只需求出极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ，然后定义 $f(1)$ 为此极限值即可.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{(1-x) \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\pi - \pi \cos \pi x}{-\sin \pi x + (1-x)\pi \cos \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2 \sin \pi x}{-\pi \cos \pi x - \pi \cos \pi x - (1-x)\pi^2 \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上连续，因此定义

$$f(1) = \frac{1}{\pi},$$

使 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

【评注】 本题实质上是一求极限问题，但以这种形式表现出来，还考查了连续的概念. 在计算过程中，也可先作变量代换 $y=1-x$ ，转化为求 $y \rightarrow 0^+$ 的极限，可以适当简化.

完全类似例题在一般教科书上都可找到，或参见《文登数学全真模拟试卷》P.数学三 P.24 第三题.

14.. 【分析】 本题是典型的复合函数求偏导问题： $g = f(u, v)$ ，

$u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ ，直接利用复合函数求偏导公式即可，注意利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

【详解】 $\frac{\partial g}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

【评注】 本题考查半抽象复合函数求二阶偏导.
完全类似例题《数学复习指南》P.171 **【例 7.20,7.22】**.

15. **【分析】** 从被积函数与积分区域可以看出, 应该利用极坐标进行计算.

【详解】 作极坐标变换: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 有

$$\begin{aligned} I &= e^\pi \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\ &= e^\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r e^{-r^2} \sin r^2 dr. \end{aligned}$$

令 $t = r^2$, 则

$$I = \pi e^\pi \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt.$$

记 $A = \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt$, 则

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^\pi e^{-t} \sin t de^{-t} \\ &= -[e^{-t} \sin t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-t} \cos t dt] \\ &= -\int_0^\pi \cos t de^{-t} \\ &= -[e^{-t} \cos t \Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^{-t} \sin t dt] \\ &= e^{-\pi} + 1 - A. \end{aligned}$$

因此 $A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}),$

$$I = \frac{\pi e^\pi}{2}(1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2}(1 + e^\pi).$$

【评注】 本题属常规题型, 明显地应该选用极坐标进行计算, 在将二重积分化为定积分后, 再通过换元与分步积分 (均为最基础的要求), 即可得出结果, 综合考查了二重积分、换元积分与分步积分等多个基础知识点.

16. **【分析】** 先通过逐项求导后求和, 再积分即可得和函数, 注意当 $x=0$ 时和为 1. 求

出和函数后, 再按通常方法求极值.

【详解】

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两边从 0 到 x 积分, 得

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

由 $f(0)=1$, 得

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), (|x| < 1).$$

令 $f'(x) = 0$, 求得唯一驻点 $x=0$. 由于

$$f''(x) = -\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(0) = -1 < 0,$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值, 且极大值为

$$f(0)=1.$$

【评注】 求和函数一般都是先通过逐项求导、逐项积分等转化为可直接求和的几何级数情形, 然后再通过逐项积分、逐项求导等逆运算最终确定和函数.

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P.285 数学三模拟试题(五)第八题.

17. **【分析】** $F(x)$ 所满足的微分方程自然应含有其导函数, 提示应先对 $F(x)$ 求导, 并将其余部分转化为用 $F(x)$ 表示, 导出相应的微分方程, 然后再求解相应的微分方程.

【详解】 (1) 由

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= g^2(x) + f^2(x) \\ &= [f(x) + g(x)]^2 - 2f(x)g(x) \\ &= (2e^x)^2 - 2F(x), \end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为

$$F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}.$$

$$\begin{aligned} (2) F(x) &= e^{-\int 2dx} \left[\int 4e^{2x} \cdot e^{\int 2dx} dx + C \right] \\ &= e^{-2x} \left[\int 4e^{4x} dx + C \right] \\ &= e^{2x} + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式, 得

$$C=-1.$$

于是

$$F(x) = e^{2x} - e^{-2x}.$$

【评注】 本题没有直接告知微分方程, 要求先通过求导以及恒等变形引出微分方程的形式, 从题型来说比较新颖, 但具体到微分方程的求解则并不复杂, 仍然是基本要求的范围.

完全类似例题在文登数学辅导班上介绍过, 也可参见《文登数学全真模拟试卷》数学三 P.17 第三题.

18.. **【分析】** 根据罗尔定理, 只需再证明存在一点 $c \in [0,3)$, 使得 $f(c) = 1 = f(3)$,

然后在 $[c,3]$ 上应用罗尔定理即可. 条件 $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 等价于 $\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$, 问题转化为 1 介于 $f(x)$ 的最值之间, 最终用介值定理可以达到目的.

【详解】 因为 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且在 $[0, 2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 于是

$$m \leq f(0) \leq M,$$

$$m \leq f(1) \leq M,$$

$$m \leq f(2) \leq M.$$

故

$$m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M.$$

由介值定理知, 至少存在一点 $c \in [0,2]$, 使

$$f(c) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1.$$

因为 $f(c)=1=f(3)$, 且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在 $(c,3)$ 内可导, 所以由罗尔定理知, 必存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

【评注】 介值定理、微分中值定理与积分中值定理都是常考知识点, 且一般是两两结合起来考. 本题是典型的结合介值定理与微分中值定理的情形.

完全类似例题见《数学复习指南》P.128 **【例 5.2】** 及 P.131 的 **【解题提示】**.

19.. **【分析】** 方程的个数与未知量的个数相同, 问题转化为系数矩阵行列式是否为零, 而系数行列式的计算具有明显的特征: 所有列对应元素相加后相等. 可先将所有列对应元素相加, 然后提出公因式, 再将第一行的 (-1) 倍加到其余各行, 即可计算出行列式的值.

【详解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \Lambda & a_n \\ M & M & M & M & M \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n + b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1} (b + \sum_{i=1}^n a_i).$$

(1) 当 $b \neq 0$ 时且 $b + \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 时, 秩(A)=n, 方程组仅有零解.

(2) 当 $b=0$ 时, 原方程组的同解方程组为

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \Lambda + a_n x_n = 0.$$

由 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 可知, $a_i (i=1, 2, \Lambda, n)$ 不全为零. 不妨设 $a_1 \neq 0$, 得原方程组的一个基础

解系为

$$\alpha_1 = (-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \Lambda, 0)^T, \quad \alpha_2 = (-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, \Lambda, 0)^T, \quad \Lambda, \quad \alpha_n = (-\frac{a_n}{a_1}, 0, 0, \Lambda, 1)^T.$$

当 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时, 有 $b \neq 0$, 原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 - \sum_{i=1}^n a_i & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - \sum_{i=1}^n a_i & \Lambda & a_n \\ M & M & M & & M \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n - \sum_{i=1}^n a_i \end{bmatrix}$$

(将第 1 行的 -1 倍加到其余各行, 再从第 2 行到第 n 行同乘以 $-\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}$ 倍)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ M & M & M & & M \\ -1 & 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{bmatrix}$$

(将第 n 行 $-a_n$ 倍到第 2 行的 $-a_2$ 倍加到第 1 行, 再将第 1 行移到最后一行)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ M & M & M & & M \\ -1 & 0 & 0 & \Lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix}$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1, \quad \Lambda, \quad x_n = x_1.$$

原方程组的一个基础解系为

$$\alpha = (1, 1, \Lambda, 1)^T.$$

【评注】 本题的难点在 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时的讨论, 事实上也可这样分析: 此时系数矩阵的

秩为 $n-1$ (存在 $n-1$ 阶子式不为零), 且显然 $\alpha = (1, 1, \Lambda, 1)^T$ 为方程组的一个非零解, 即可作为基础解系.

完全类似问题 2002 年已考过, 见 2002 年数学三第

20. 【分析】 特征值之和为 A 的主对角线上元素之和, 特征值之积为 A 的行列式, 由此可求出 a, b 的值; 进一步求出 A 的特征值和特征向量, 并将相同特征值的特征向量正交化 (若有必要), 然后将特征向量单位化并以此为列所构造的矩阵即为所求的正交矩阵.

【详解】 (1) 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$. 由题设, 有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12.$$

解得 $a=1, b=-2$.

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3),$$

得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$, 得其基础解系

$$\xi_1 = (2, 0, 1)^T, \quad \xi_2 = (0, 1, 0)^T.$$

对于 $\lambda_3 = -3$, 解齐次线性方程组 $(-3E - A)x = 0$, 得基础解系

$$\xi_3 = (1, 0, -2)^T.$$

由于 ξ_1, ξ_2, ξ_3 已是正交向量组, 为了得到规范正交向量组, 只需将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化, 由此得

$$\eta_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \quad \eta_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T.$$

令矩阵

$$Q = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 $X=QY$ 下, 有

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

且二次型的标准形为

$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2.$$

【评注】 本题求 a, b , 也可先计算特征多项式, 再利用根与系数的关系确定: 二次型 f 的矩阵 A 对应特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -b \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)[\lambda^2 - (a - 2)\lambda - (2a + b^2)].$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 + \lambda_3 = a - 2, \lambda_2 \lambda_3 = -(2a + b^2)$. 由题设得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (a - 2) = 1,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2(2a + b^2) = -12.$$

解得 $a=1, b=2$.

第一步求参数见《数学复习指南》P.361 重要公式与结论 4, 完全类似例题见《文登数学全真模拟试卷》数学三 P.47 第九题.

21.. **【分析】** 先求出分布函数 $F(x)$ 的具体形式, 从而可确定 $Y=F(X)$, 然后按定义求 Y 的分布函数即可. 注意应先确定 $Y=F(X)$ 的值域范围 ($0 \leq F(X) \leq 1$), 再对 y 分段讨论.

【详解】 易见, 当 $x < 1$ 时, $F(x)=0$; 当 $x > 8$ 时, $F(x)=1$.

对于 $x \in [1, 8]$, 有

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \sqrt[3]{x} - 1.$$

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. 显然, 当 $y < 0$ 时, $G(y)=0$; 当 $y \geq 1$ 时, $G(y)=1$.

对于 $y \in [0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\} \\ &= P\{\sqrt[3]{X} - 1 \leq y\} = P\{X \leq (y+1)^3\} \\ &= F[(y+1)^3] = y. \end{aligned}$$

于是, $Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y < 0, \\ y, & \text{若 } 0 \leq y < 1, \\ 1, & \text{若 } y \geq 1. \end{cases}$$

【评注】 事实上, 本题 X 为任意连续型随机变量均可, 此时 $Y=F(X)$ 仍服从均匀分布: 当 $y < 0$ 时, $G(y)=0$;

当 $y \geq 1$ 时, $G(y)=1$;

当 $0 \leq y < 1$ 时, $G(y) = P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\}$

$$= P\{X \leq F^{-1}(y)\}$$

$$= F(F^{-1}(y)) = y.$$

【评注】 本题是《数学复习指南》P.431【例 2.23】原题（实际上还是此题的特殊情形）.

22.. 【分析】 求二维随机变量函数的分布，一般用分布函数法转化为求相应的概率. 注意 X 只有两个可能的取值，求概率时可用全概率公式进行计算.

【详解】 设 $F(y)$ 是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} G(u) &= P\{X + Y \leq u\} \\ &= 0.3P\{X + Y \leq u | X = 1\} + 0.7P\{X + Y \leq u | X = 2\} \\ &= 0.3P\{Y \leq u - 1 | X = 1\} + 0.7P\{Y \leq u - 2 | X = 2\}. \end{aligned}$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$\begin{aligned} G(u) &= 0.3P\{Y \leq u - 1\} + 0.7P\{Y \leq u - 2\} \\ &= 0.3F(u - 1) + 0.7F(u - 2). \end{aligned}$$

由此，得 U 的概率密度

$$\begin{aligned} g(u) &= G'(u) = 0.3F'(u - 1) + 0.7F'(u - 2) \\ &= 0.3f(u - 1) + 0.7f(u - 2). \end{aligned}$$

【评注】 本题属新题型，求两个随机变量和的分布，其中一个是连续型一个是离散型，要求用全概率公式进行计算，类似问题以前从未出现过，具有一定的难度和综合性.

但本题是《考研数学大串讲》（2002 版，世界图书出版公司）P.250【例 28】的原题，其他参考书中从未出现过类似题型.

注： 1. 《数学复习指南》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编：陈文灯、黄先开

2. 《数学题型集粹与练习题集》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编：陈文灯、黄先开

3. 《文登数学全真模拟试卷》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编：陈文灯、黄先开

4. 《数学最后冲刺》（2003 版，经济类）世界图书出版公司

主编：陈文灯、黄先开

5. 《考研数学大串讲》（2002 版，经济类）世界图书出版公司

主编: 黄先开、曹显兵、施明存

(文登学校供稿)

FREEKAOYAN