2005 年数学三试题分析、详解和评注

一、**填空题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ _ .

（2） 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为

（3）设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\Big|_{(1,0)}=$

（4）设行向量组 $(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq 1$，则 a= .

（5）从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X, 再从 $1,2,\Lambda,X$ 中任取一个数，记为 Y, 则 $P\{Y=2\}=$

（6）设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 a= ____ , b=_____ .

二、**选择题**（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点.

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. [ ]

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则

(A) $I_3>I_2>I_1$. （B）$I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$. [ ]

（9）设 $a_n>0, n=1,2,\Lambda$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散 . （B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛. [ ]

（10）设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

(A)　f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是极小值.　　（B）　f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是极大值.

（C）　f(0)是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极大值.　　(D)　f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极小值.

[　　]

（11）以下四个命题中，正确的是

(A)　若 $f'(x)$ 在（0，1）内连续，则 f(x)在（0，1）内有界.

（B）若 $f(x)$ 在（0，1）内连续，则 f(x)在（0，1）内有界.

（C）若 $f'(x)$ 在（0，1）内有界，则 f(x)在（0，1）内有界.

(D)　若 $f(x)$ 在（0，1）内有界，则 $f'(x)$ 在（0，1）内有界.　　[　]

（12）设矩阵 A=$(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为

(A)　$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B)　3.　(C)　$\frac{1}{3}$.　　(D)　$\sqrt{3}$.　　　[　　]

（13）设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)　$\lambda_1=0$.　　(B)　$\lambda_2=0$.　(C)　$\lambda_1\neq 0$.　(D)　$\lambda_2\neq 0$.　　　[　D　]

（14）　设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(cm)$，样本标准差 $s=1(cm)$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.　　(B)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.　　(D)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

[　　]

三 、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 8 分）

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$.

（16）（本题满分 8 分）

设 f(u)具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

（17）（本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

（18）（本题满分 9 分）

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间(-1,1)内的和函数 S(x).

（19）（本题满分 8 分）

设 f(x),g(x)在[0，1]上的导数连续，且 f(0)=0, $f'(x)\ge 0$, $g'(x)\ge 0$.证明：对任何 a$\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1).$$

（20）（本题满分 13 分）

已知齐次线性方程组

$$\text{（i）}\quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases}$$

和

$$\text{（ii）}\quad \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解，求 a,b, c 的值.

（21）（本题满分 13 分）

设 $D=\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A,B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(I) 计算 P^TDP，其中 $P=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$；

（II）利用(I)的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

（22）（本题满分 13 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

求：（I） (X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（II） $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（III） $P\{Y\le\frac{1}{2}\Big|X\le\frac{1}{2}\}$.

（23）（本题满分 13 分）

设 $X_1,X_2,\Lambda\ ,X_n(n>2)$ 为来自总体 $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\Lambda\ ,n.$

求：（I） Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\Lambda\ ,n$；

（II）Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$.

（III）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

1……**【分析】**　本题属基本题型，直接用无穷小量的等价代换进行计算即可.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{2x}{x^2+1}=2.$

【评注】 若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$，则 $\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\overline{\alpha}(x)$.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.23【例 1.28】

2….【分析】 直接积分即可.

【详解】 原方程可化为 $(xy)'=0$，积分得 $xy=C$，

代入初始条件得 C=2，故所求特解为 xy=2.

【评注】 本题虽属基本题型， 也可先变形

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

再积分求解.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.229【例 10.5】

3…..

【分析】 基本题型，直接套用相应的公式即可.

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{x+y}+\frac{x+1}{1+y},$$

于是 $dz\Big|_{(1,0)}=2edx+(e+2)dy$.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.166【例 7.6】

4……………….【分析】 四个 4 维向量线性相关，必有其对应行列式为零，由此即可确定 a.

【详解】 由题设，有

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=(a-1)(2a-1)=0,$$ 得 $a=1,a=\frac{1}{2}$，但题设 $a\neq1$，故 $a=\frac{1}{2}$.

【评注】 当向量的个数小于维数时，一般通过初等变换化阶梯形讨论其线性相关性.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.312【例 3.3】

5…...

【分析】 本题涉及到两次随机试验，想到用全概率公式, 且第一次试验的各种两两互不相容的结果即为完备事件组或样本空间的划分.

【详解】 $P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$

$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$

$$=\frac{1}{4}\times(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13}{48}.$$

【评注】 全概率公式综合考查了加法公式、乘法公式和条件概率，这类题型一直都是考查的重点.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.407【例 1.31】

6….【分析】 首先所有概率求和为 1，可得 a+b=0.5, 其次，利用事件的独立性又可得一等式，由此可确定 a,b 的取值.

【详解】 由题设，知 a+b=0.5

又事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，于是有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

即 a=$(0.4+a)(a+b)$, 由此可解得 a=0.4, b=0.1

【评注】 本题考查二维随机变量分布律的性质和独立随机事件的概念，均为大纲要求的基本内容.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.528【习题二，1.（9）】

7…….【分析】 先求出可能极值点，再利用单调性与极值画出函数对应简单图形进行分析，当恰好有一个极值为零时，函数 f(x)恰好有两个不同的零点.

【详解】 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，知可能极值点为 x=1,x=2，且

$f(1)=5-a, f(2)=4-a$，可见当 a=4 时，函数 f(x) 恰好有两个零点，故应选(B).

【评注】 对于三次多项式函数 f(x)=ax^3+bx^2+cx+d ,当两个极值同号时，函数 f(x) 只有一个零点；当两个极值异号时，函数 f(x) 有三个零点；当两个极值有一为零时，，函数 f(x) 有两个零点.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.151【例 6.26】

（8…….

【分析】 关键在于比较 $\sqrt{x^2+y^2}$ 、 x^2+y^2 与 $(x^2+y^2)^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的大小.

【详解】 在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上，有$0\le x^2+y^2\le 1$，从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge(x^2+y^2)^2\ge 0$$

由于 cosx 在$(0,\frac{\pi}{2})$ 上为单调减函数，于是

$$0 \le \cos\sqrt{x^2+y^2} \le \cos(x^2+y^2) \le \cos(x^2+y^2)^2$$

因此 $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma < \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma < \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，故应选(A).

【评注】 本题比较二重积分大小，本质上涉及到用重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.183【例 8.2】

9.….**【分析】** 可通过反例用排除法找到正确答案.

【详解】 取 $a_n = \dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 均发散，排除(A),(B)选项，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 发散，进一步排除(C)，故应选(D). 事实上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 的部分和数列极限存在.

【评注】 通过反例用排除法找答案是求解类似无穷级数选择问题的最常用方法.

10.….**【分析】** 先求出 $f'(x), f''(x)$，再用取极值的充分条件判断即可.

【详解】 $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$，显然 $f'(0)=0, f'(\frac{\pi}{2})=0$，

又 $f''(x) = \cos x - x\sin x$，且 $f''(0)=1>0, f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$，故 f(0)是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值，应选(B).

【评注】 本题为基本题型，主要考查取极值的充分条件.

对应定理公式见《数学复习指南》（经济类）P.141

11……**【分析】** 通过反例用排除法找到正确答案即可.

【详解】 设 f(x)=$\dfrac{1}{x}$，则 f(x)及 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ 均在（0，1）内连续，但 f(x)在（0，1）内无界，排除(A)、(B)；又 $f(x)=\sqrt{x}$ 在（0，1）内有界，但 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在（0，1）内无界，排除(D). 故应选(C).

【评注】 本题也可直接证明：用拉格朗日中值定理，有

$f(x) - f(\frac{1}{2}) = f'(\xi)(x-\frac{1}{2}), \xi$ 在(0,1)之间，由此容易推知若 $f'(x)$ 在（0，1）内有界，则 f(x)在（0，1）内有界.

12……**【分析】** 题设与 A 的伴随矩阵有关，一般联想到用行列展开定理和相应公式：

$$AA^* = A^*A = |A|E..$$

【详解】 由 $A^* = A^T$ 及 $AA^* = A^*A = |A|E$，有 $a_{ij} = A_{ij}, i, j = 1,2,3$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $AA^T = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|A| = 1$

而 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2 \neq 0$，于是 $|A| = 1$，且 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故正确选项为(A).

【评注】 涉及伴随矩阵的问题是常考题型，只需注意到两个重要思路：一是用行列展开定理，另一是用公式：$AA^* = A^*A = |A|E.$

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.272【例 1.8】

13…….【分析】 讨论一组抽象向量的线性无关性，可用定义或转化为求其秩即可.

【详解】 方法一：令 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$，则

$$k_1\alpha_1 + k_2\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0, \qquad (k_1 + k_2\lambda_1)\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 = 0.$$

由于 α_1, α_2 线性无关，于是有

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当 $\lambda_2 \neq 0$ 时，显然有 $k_1 = 0, k_2 = 0$，此时 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2 \neq 0$(,否则，α_1 与 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法二： 由于 $[\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)] = [\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2]\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$,

可见 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0.$ 故应选(D).

【评注】 本题综合考查了特征值、特征向量和线性相关与线性无关的概念.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.320【例 3.17】

14…..【分析】 总体方差未知，求期望的区间估计，用统计量：$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$

【详解】 由正态总体抽样分布的性质知，$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$， 故$\mu$的置信度为 0.90 的置信区间是$(\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$，即$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$. 故应选(C).

【评注】 正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的三个抽样分布：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$、$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$、$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$是常考知识点，应当牢记.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.506【例 6.16】

15…. 【分析】 $"\infty-\infty"$型未定式，一般先通分，再用罗必塔法则.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

【评注】 本题属基本题型，在里用罗必塔法则求极限的过程中，应注意利用无穷小量的等价代换进行简化.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.29【例 1.45】

16…… 【分析】 先求出二阶偏导数，再代入相应表达式即可.

【详解】 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{x}{y})+\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})+f(\frac{x}{y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y}),$$

所以 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

$$=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y})$$

$$=\frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x}).$$

【评注】 本题属基本题型，但在求偏导数的过程中应注意计算的准确性.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.171【例 7.18】

17….【分析】 被积函数含有绝对值，应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分即可.

【详解】 记 $D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\}$,

$$D_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\},$$

于是 $$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)dxdy-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

【评注】 形如积分 $\iint\limits_D|f(x,y)|d\sigma$、$\iint\limits_D\max\{f(x,y),g(x,y)\}d\sigma$、$\iint\limits_D\min\{f(x,y),g(x,y)\}d\sigma$、$\iint\limits_D[f(x,y)]d\sigma$、$\iint\limits_D\operatorname{sgn}\{f(x,y)-g(x,y)\}d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.193【例 8.18】

18….【分析】幂级数求和函数一般采用逐项求导或逐项积分，转化为几何级数或已知函数的幂级数展开式，从而达到求和的目的.

【详解】 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n},$$

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n},\quad S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

则　　$S(x)=S_1(x)-S_2(x)$，$x\in(-1,1)$.

由于

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$(xS_1(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}, x\in(-1,1),$$

因此　$xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

又由于　$S_1(0)=0$，故

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

所以　$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

【评注】 而幂级数求和尽量将其转化为形如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$或$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$幂级数，再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数. 本题应特别注意 x=0 的情形.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.216【例 9.18】

19….**【分析】**　可用参数变易法转化为函数不等式证明，或根据被积函数的形式，通过分部积分讨论.

【详解】 方法一：设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1),$$

则 F(x)在[0，1]上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)],$$

由于$x\in[0,1]$时，$f'(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$，因此$F'(x)\leq 0$，即 F(x)在[0，1]上单调递减.

注意到

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(1)g(1),$$

而　$\int_0^1 g(t)f'(t)dt=\int_0^1 g(t)df(t)=g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)dt$

$$= f(1)g(1) - \int_0^1 f(t)g'(t)dt\,,$$

故 F(1)=0.

因此 $x \in [0,1]$ 时，$F(x) \geq 0$，由此可得对任何 $a \in [0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1).$$

方法二：$\int_0^a g(x)f'(x)dx = g(x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)g'(x)dx$

$$= f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)dx\,,$$

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$= f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)dx.$$

由于 $x \in [0,1]$ 时，$g'(x) \geq 0$，因此

$$f(x)g'(x) \geq f(a)g'(x)\,,\quad x \in [a,1]\,,$$

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq \int_0^1 f(a)g'(x)dx = f(a)[g(1) - g(a)]\,,$$

从而 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$$\geq f(a)g(a) + f(a)[g(1) - g(a)] = f(a)g(1).$$

【评注】 对于积分不等式的证明，主要有两个途径：一是转化为函数不等式，二是通过恒等变形，如变量代换、分部积分等，再用积分的不等式性质进行讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.115【例 4.42~46】

20…..**【分析】** 方程组（ii）显然有无穷多解，于是方程组（i）也有无穷多解，从而可确定 a，这样先求出（i）的通解，再代入方程组（ii）确定 b,c 即可.

【详解】 方程组（ii）的未知量个数大于方程个数，故方程组方程组（ii）有无穷多解.因为方程组（i）与（ii）同解，所以方程组（i）的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组（i）的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix},$$

从而 a=2.　此时，方程组（i）的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $(-1,-1,1)^T$ 是方程组（i）的一个基础解系.

将 $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$ 代入方程组（ii）可得

$b=1, c=2$ 或 $b=0, c=1$.

当 $b=1, c=2$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）同解.

当 $b=0, c=1$ 时，对方程组（ii）的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然此时方程组（i）与（ii）的解不相同.

综上所述，当 a=2,b=1,c=2 时，方程组（i）与（ii）同解.

【评注】 本题求 a 也可利用行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a+2=0$，得 a=2.

本题也可这样考虑：

方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \\ x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$ 必存在无穷多解，化系数矩阵为阶梯形，可确定 a=2,b=0,c=1 或 a=2,b=1,c=2，再对两组数据进行讨论即可.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.355【习题 3（7）】

21….**【分析】** 第一部分直接利用分块矩阵的乘法即可；第二部分是讨论抽象矩阵的正定性，一般用定义.

【详解】 (I) 因 $P^T = \begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix}$，有

$$P^TDP = \begin{bmatrix} E_m & o \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & C \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ o & E_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

（II）矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是正定矩阵.

由(I)的结果可知，矩阵 D 合同于矩阵

$$M=\begin{bmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

又 D 为正定矩阵，可知矩阵 M 为正定矩阵.

因矩阵 M 为对称矩阵，故 $B-C^TA^{-1}C$ 为对称矩阵. 对 $X=(0,0,\Lambda\ ,0)^T$ 及任意的 $Y=(y_1,y_2,\Lambda\ ,y_n)^T\neq 0$，有

$$(X^T,Y^T)\begin{pmatrix} A & o \\ o & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y>0.$$ 故 $B-C^TA^{-1}C$ 为正定矩阵.

【评注】 判定正定矩阵的典型方法有：（1）用顺序主子式全大于 0；（2）用特征值全大于零；（3）用定义. 对于抽象矩阵，一般用后两个方法.

22…….**【分析】** 求边缘概率密度直接用公式即可；而求二维随机变量函数的概率密度，一般用分布函数法，即先用定义求出分布函数，再求导得到相应的概率密度；直接用条件概率公式计算即可.

【详解】 （I） 关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy, & 0<x<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx, & 0<y<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（II） 令 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$，

1） 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$；

2） 当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}$

$$=z-\frac{1}{4}z^2;$$

3) 当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1.$

即分布函数为： $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$

故所求的概率密度为： $f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（III） $P\{Y\le\frac{1}{2}\,\big|\,X\le\frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}=\dfrac{3/16}{1/4}=\dfrac{3}{4}.$

【评注】 本题属基本题型，只需注意计算的准确性，应该可以顺利求解.第二步求随机变量函数分布，一般都是通过定义用分布函数法讨论.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）P.436【例 2.38~40】

23.…**【分析】** 先将 Y_i 表示为相互独立的随机变量求和，再用方差的性质进行计算即可；求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$，本质上还是数学期望的计算，同样应注意利用数学期望的运算性质；估计 $c(Y_1+Y_n)^2$，利用其数学期望等于 σ^2 确定 c 即可.

【详解】 由题设，知 $X_1,X_2,\Lambda\,,X_n(n>2)$ 相互独立，且

$$EX_i=0,DX_i=\sigma^2(i=1,2,\Lambda\,,n),\quad E\overline{X}=0.$$

（I） $DY_i=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\ne i}^{n}X_j]$

$$=(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}\sum_{j\ne i}^{n}DX_j$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

（II） $Cov(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]$

$$=E(Y_1Y_n)=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]$$

$$=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-2E(X_1\overline{X})+E\overline{X}^2$$

$$=0-\frac{2}{n}E[X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j]+D\overline{X}+(E\overline{X})^2$$

$$=-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{1}{n}\sigma^2.$$

（III） $E[c(Y_1+Y_n)^2]=cD(Y_1+Y_n)$

$$=c[DY_1+DY_2+2Cov(Y_1,Y_n)]$$

$$=c[\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}]\sigma^2=\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2=\sigma^2,$$

故 $c=\dfrac{n}{2(n-2)}.$

【评注】 通过定义求随机变量的数字特征是基本要求，也是到目前为止考查最多的情形，但读者还应注意利用数字特征的运算性质进行分析讨论，同样是求解数字特征的一个重要途径.

本题前两部分为文登学校辅导班上讲授过的原题（原题求相关系数，刚好是本题的两部分，请参见数理统计部分笔记）.