

2005 年全国硕士研究生入学统一考试理工

数学二试题详解及评析

一、 填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy \Big|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答】 $-\pi dx$.

【详解】 $dy = de^{x \ln(1 + \sin x)} = (1 + \sin x)^x d(x \ln(1 + \sin x))$

$$= \ln(1 + \sin x) \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) + \ln(1 + \sin x) dx$$

$$dy \Big|_{x=\pi} = y'(\pi) dx = -\pi dx.$$

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $y = x + \frac{3}{2}$

【详解】 因为 $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} = 1,$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y = x + \frac{3}{2}$.

(3) $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答】 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】 令 $x = \sin t$, 则

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2 - \sin^2 t) \cos t} dt$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{1 + \cos^2 t} = - \arctan(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x.$

【详解】原方程等价于

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x ,$$

于是通解为 $y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} [\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C] = \frac{1}{x^2} \cdot [\int x^2 \ln x dx + C]$

$$= \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x + C \frac{1}{x^2} ,$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C=0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,

则 $k =$ _____

【答】 $\frac{3}{4}$.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2(\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} = \frac{3}{4k} = 1 ,$$

得 $k = \frac{3}{4}$.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A|=1$, 那么 $|B|=$ _____.

【答】 2

【详解】由题设, 有

$$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} ,$$

于是有 $|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2$.

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,

只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

【 】

【答】 应选 (C)

【详解】 先求出 $f(x)$ 的表达式.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+|x|^{3n})^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1 (|x| < 1),$$

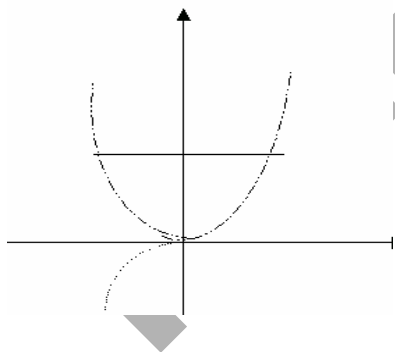
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+1)^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1 (|x| = 1),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = |x|^3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}} = |x|^3 (|x| > 1).$$

因此，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ |x|^3, & |x| > 1. \end{cases}$$

由 $y = f(x)$ 的表达式及它的函数图形可知， $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处不可导(图形是尖点)，其余点 $f(x)$ 均可导，因此选 (C)。



(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”，则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

【 】

【答】 应选 (A)

【详解】 已知， $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$

若 $F(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 为偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 的全体原函数为偶函数.

又若 $F(x)$ 为偶函数，则 $F'(x) = f(x)$ 为奇函数，因此选 (A) .

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的

法线与 x 轴交点的横坐标是

- (A) $\frac{1}{8}\ln 2 + 3$. (B) $-\frac{1}{8}\ln 2 + 3$.
 (C) $-8\ln 2 + 3$. (D) $8\ln 2 + 3$.

【 】

【答】 应选 (B)

【详解】 当 $x=3$ 时，有 $t^2 + 2t = 3$ ，得 $t=1, t=-3$ (舍去，此时 y 无意义)，
 于是

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{1/(1+t)}{2t+2} \right|_{t=1} = \frac{1}{8}$$

可见过点 $x=3$ (此时 $y=\ln 2$) 的法线方程为：

$$y - \ln 2 = -8(x - 3)$$

令 $y=0$ ，得其与 x 轴交点的横坐标为： $\frac{1}{8}\ln 2 + 3$ ，

故应(A).

(10) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，

a, b 为常数，则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

- (A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 由轮换对称性，有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \end{aligned}$$

$$= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi.$$

应选(D).

(11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

$$(A) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (B) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$(C) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (D) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

【 】

【答】 应选 (B)

【详解】

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 应选(B).

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则

- (A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.
 (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.
 (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
 (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【 】

【答】 应选 (D)

【详解】 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 点处无定义, 因此是间断点.

且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, 所以 $x=0$ 为第二类间断点 ;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1,$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点, 故应选(D).

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$.

【 】

【答】 应选 (B)

【详解】 按特征值特征向量定义, 有 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.

$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, k_1, k_2 恒为 0

$$\Leftrightarrow (k_1 + \lambda_1 k_2)\alpha_1 + \lambda_2 k_2 \alpha_2 = 0, k_1, k_2 \text{ 恒为 } 0$$

由于不同特征值的特征向量线性无关, 所以 α_1, α_2 线性无关.

于是
$$\begin{cases} k_1 + k_2 \lambda_1 = 0, \\ k_2 \lambda_2 = 0. \end{cases} \quad k_1, k_2 \text{ 恒为 } 0$$

而齐次方程组
$$\begin{cases} k_1 + k_2 \lambda_1 = 0, \\ k_2 \lambda_2 = 0. \end{cases} \text{ 只有零解} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq 0.$$

所以应选 (B).

(14) 设 A 为 n ($n \geq 2$) 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* . (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
 (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$. (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

【 】

【答】 应选 (C)

【详解】 为书写方便, 不妨考查 A 为 3 阶矩阵, 因为 A 做初等行变换得到 B , 所以用初等矩阵左乘 A 得到 B , 按已知有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B.$$

于是

$$B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而

$$\frac{B^*}{|B|} = \frac{A^*}{|A|} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又因 $|A| = -|B|$, 故 $A^* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -B^*$.

所以选 (C)

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

【详解】 由于 $\int_0^x f(x-t)dt \stackrel{x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$,

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x \int_0^x f(u)du} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt / x}{\int_0^x f(u)du / x + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(16) (本题满分 11 分)

如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图象, 过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单

调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.

【详解】 (1) 先求 $S_1(x)$ 与 $S_2(y)$ 的表达式.

由定积分的几何意义知

$$S_1(x) = \int_0^x [e^t - \frac{1}{2}(1+e^t)] dt = \frac{1}{2}(e^x - x - 1),$$

$$S_2(y) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t)) dt,$$

(2) 由题设, $S_1(x) = S_2(y)$

即
$$\frac{1}{2}(e^x - x - 1) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t)) dt,$$

其中 $y = e^x$, 于是

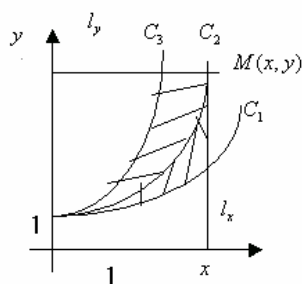
$$\frac{1}{2}(y - \ln y - 1) = \int_1^y (\ln t - \varphi(t)) dt$$

(3) 解方程:

在中令 $y = 1$, 等式自然成立.

两边对 y 求导得
$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{y}) = \ln y - \varphi(y),$$

故所求的函数关系为:
$$x = \varphi(y) = \ln y - \frac{y-1}{2y}.$$



(17)(本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y=f(x)$, 点 $(3,2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线, 其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$.

【详解】 按题意, 直接可知

$f(0)=0, f(3)=2, f''(3)=0$. (拐点必要条件). 从图中可求出 $y=f(x)$ 在点(0,0)与(3,2)处的切线分别为

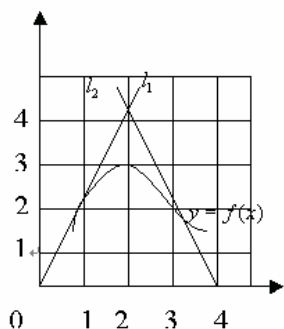
$$y=2x, y=-2x+8$$

于是 $f'(0)=2, f'(3)=-2$

现在分部积分法计算积分值：

原式

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 (x^2+x)df''(x) = (x^2+x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 (2x+1)f''(x)dx \\ &= -\int_0^3 (2x+1)df'(x) = -(2x+1)f'(x)\Big|_0^3 + 2\int_0^3 f'(x)dx \\ &= -7 \cdot f'(3) + f'(0) + 2f(x)\Big|_0^3 \\ &= -7 \cdot (-2) + 2 + 2 \cdot (2-0) \\ &= 20 \end{aligned}$$



(18)(本题满分12分)

用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ ，并求其满

足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

【详解】 建立 y 对 t 的导数与 y 对 x 的导数之间的关系.

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2y}{dt^2} \right] \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right),$$

代入原方程，得 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

解此微分方程，得 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

回到 x 为自变量得 $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2}$

将初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 代入，有 $C_1 = 2, C_2 = 1$.

故满足条件的特解为 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}$.

(19)(本题满分12分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$ ；

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

【详解】 (I) 即证 $F(x) = f(x) - 1 + x$ ，则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，

且 $F(0) = -1 < 0, F(1) = 1 > 0$ ，于是由介值定理知，存在存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $F(\xi) = 0$ ，

即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，

知存在两个不同的点 $\eta \in (0, \xi), \zeta \in (\xi, 1)$ ，

使得 $f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0}, f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi}$

于是

$$\begin{aligned} f'(\eta)f'(\zeta) &= \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} \\ &= \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1. \end{aligned}$$

(20)(本题满分10分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$ ，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆

域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

【详解】 (1) 先求 $f(x, y)$.

由 $dz = dx^2 - dy^2 = d(x^2 - y^2) \Rightarrow z = x^2 - y^2 + c;$

由 $f(1,1) = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 内的驻点及相应函数值.

解
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases}$$

得 $(x, y) = (0, 0)$.

唯一驻点 $(0, 0)$, $f(0, 0) = 2$.

(3) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界 $y^2 = 4(1-x^2)$ 上的最大值和最小值.

将 $y^2 = 4(1-x^2)$ ($|x| \leq 1$) 代入 $z = x^2 - y^2 + 2$ 得

$$z(x) = x^2 - 4(1-x^2) + 2 = 5x^2 - 2.$$

(4) 比较函数值.

$Z = f(x, y)$ 在 D 上的最大值是 $\max\{2, 3, -2\} = 3$.

最小值是 $\max\{2, 3, -2\} = -2$.

解

(21) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

【详解】 在 D 中,

$$|x^2 + y^2 - 1| = \begin{cases} 1 - (x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 & \end{cases}$$

用圆弧 $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 将 D 分成两部分, $D = D_1 \cup D_2$,

记 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in D\}$,

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1, (x, y) \in D\},$$

用分块积分法得

$$\begin{aligned} & \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma \\ &= -\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \end{aligned}$$

$$D_2 = \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

(22)(本题满分9分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T$, $\beta_2 = (-2, a, 4)^T$, $\beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【详解】 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 故三个方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \alpha_i \quad (i=1, 2, 3)$$

均有解. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a & \vdots & 1 & a & 1 \\ a & 4 & a & \vdots & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 4+2a & 3a & \vdots & 0 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & \vdots & 0 & 3(1-a) & 1-a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a=-2 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

显然 α_2 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 因此 $a \neq -2$;

$$\text{当 } a=4 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3 \end{bmatrix},$$

显然 α_2, α_3 均不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 因此 $a \neq 4$.

而当 $a \neq -2$ 且 $a \neq 4$ 时, 秩 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$, 此时向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

$$\text{又} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2 \end{bmatrix},$$

由题设向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 必有 $a-1=0$ 或

$2-a-a^2=0$, 即 $a=1$ 或 $a=-2$.

综上所述, 满足题设条件的 a 只能是: $a=1$.

(23)(本题满分9分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常

数), 且 $AB=0$, 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【详解1】 由 $AB=0$, 知 $r(A)+r(B) \leq 3$. 又 $A \neq 0, B \neq 0$,

$$1 \leq r(A) \leq 2, 1 \leq r(B) \leq 2.$$

(1) 若 $r(A)=2$, 必有 $r(B)=1$, 此时 $k=9$.

方程组 $Ax=0$ 的通解是 $t(1, 2, 3)^T$, 其中 t 为任意实数.

(2) 若 $r(A)=1$, 则 $Ax=0$ 的通解方程是 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 且满足

$$\begin{cases} a+2b+3c=0, \\ (k-9)c=0. \end{cases}$$

如果 $c \neq 0$, 方程组的通解是 $t_1(c, 0, -a)^T + t_2(0, c, -b)^T$, 其中 t_1, t_2 为任意实数;

如果 $c=0$, 方程组的通解是 $t_1(1, 2, 0)^T + t_2(0, 0, 1)^T$, 其中 t_1, t_2 为任意实数;

【详解2】 (1) 如果 $k \neq 9$, 则秩 $r(B)=2$. 由 $AB=0$, 知 $r(A)+r(B) \leq 3$. 因此,

秩 $r(A)=1$, 所以 $Ax=0$ 的通解是

$t_1(1,2,3)^T + t_2(3,6,k)^T$, 其中 t_1, t_2 为任意实数;

(2) 如果 $k=9$. 则秩 $r(B)=1$, 那么, 秩 $r(A)=1$ 或 2.

若 $r(A)=2$, 则 $Ax=0$ 的通解是 $t(1,2,3)^T$, 其中 t 为任意实数.

若 $r(A)=1$, 对 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, 设 $c \neq 0$,

则方程组的通解是

$$t_1(c, 0, -a)^T + t_2(0, c, -b)^T$$

FREEKAOYAN