

2006 年全国硕士研究生入学考试数学 (二)

答案解析与点评

水木艾迪考研辅导班命题研究中心

清华大学数学科学系 刘坤林 谭泽光 俞正光 葛余博

1. 06 年考题仍然以基本的概念,理论和技巧为主,注意考察基础知识的理解与简单综合运用。除概率统计比 05 年考题难度略有增加以外,试卷难度普遍降低,估计平均难度系数为 55-62%,平均分数为 80-83 分;而前几年为 38-45%,平均分数只有 60-63 分。
2. 各套试题共用题目比例有较大幅度提高,在大纲要求的共同范围内难度趋于统一。特别是数三数四连续几年并无任何经济特色,正如我们在讲座和教学中强调的那样,考的是数学,确切说是理工类数学的能力。这是对 07 年考生的重要参考。
3. 06 年考题进一步说明了我们在水木艾迪考研辅导中教学策略的正确性,教学内容的准确性和有效性,包括基础班、强化班及考研三十六计冲刺班,对广大学员的教学引导与训练,使更大面积的考生最大限度受益。

就四套试题的全局而言,水木艾迪考研辅导教学题型、方法与技巧在 06 年的考试中得到完美的体现,许多试题为水木艾迪考研辅导教学或模拟试题的原题,还有大量题目仅仅有文字和符号的差别,问题类型及所含知识点与所用方法完全相同,特别是水木艾迪考研数学三十六计为广大学员提供了全盛的锐利武器。

在面向 07 年考研的水木艾迪考研辅导教学中,水木艾迪的全体清华大学教师将进一步总结经验,不辜负广大考生的支持和赞誉,以独树一帜的杰出教学质量回报考生朋友,为打造他们人生的 U-形转弯倾心工作,送他们顺利走上成功之路。

一、填空题:每小题 4 分,共 24 分

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}$ 的水平渐近线方程为 $y = \frac{1}{5}$

【解析与点评】 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4 \sin x}{x}}{5 - \frac{2 \cos x}{x}} = \frac{1}{5}$

渐近线问题的实质是极限问题,参见水木艾迪 2006 考研数学百分训练营模拟试题数二第 3 题。

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a = \frac{1}{3}$

【解析与点评】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

出自水木艾迪 2006 考研数学强化班第 4 讲例 31。还可参见清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程微积分上》(刘坤林、谭泽光编写)第 11 章综例 11.4.1,综例 11.4.2。

(3) 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}$

【解析与点评】 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

出自水木艾迪 2006 考研数学白分训练营模拟试题数一第 3 题,还可参见参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第 5 讲例 27。以及清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程微积分上》(刘坤林、谭泽光编写)第 7 章例 7.3.7。

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $y = cxe^{-x} (x \neq 0)$

【解析与点评】分离变量积分即可。这是变量可分离方程。

水木艾迪 2006 考研数学教学中有若干此类例题。例如水木艾迪 2006 考研数学白分训练营模拟试题数(第一套)四第 3 题,(第二套)数四第 2 题,水木艾迪 2006 考研数学强化班第 2 讲例 1 与第 7 讲例 1 等题目。

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -e$

【解析与点评】 当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

又把方程每一项对 x 求导, $y' = -e^y - xe^y y'$

$$y'(1 + xe^y) = -e^y \quad y' \Big|_{x=0} = -\frac{e^y}{1 + xe^y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -e$$

参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第 2 讲例 9。水木艾迪 2006 考研数学基础班例 3.19, 冲刺班考研数学 36 计例 4-2,

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$

【解析与点评】本题主要考查矩阵运算, 矩阵乘积的行列式, 和行列式计算等。这是比较简单的一道题, 只要掌握水木艾迪春季班和冲刺班关于矩阵运算, 矩阵方程, 以及行列式计算等内容及相应的例题, 就很容易做这道题了。

【解】由 $BA = B + 2E$, 得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 得

$$|B||A - E| = |2E| = 4$$

又 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 因此 $|B| = 2$ 。

二、选择题

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的

增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则【 A 】

(A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$

$$(C) \Delta y < dy < 0 \quad (D) dy < \Delta y < 0$$

【解析与点评】因为 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加, $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为凹

又 $\Delta x > 0$, 故 $0 < dy < \Delta y$ 。或直接划草图更为直观。

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则

$$\int_0^x f(t)dt \text{ 是} \quad \text{【 B 】}$$

- (A) 连续的奇函数 (B) 连续的偶函数
(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数 (D) 在 $x=0$ 间断的偶函数

本题属于水木艾迪 2006 考研数学强化班第 3 讲关于原函数的一些重要结论, 它们是:

结论 1 连续奇函数之原函数必为偶函数。

结论 2 连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和, 其中只有一个为奇函数 ($C=0$)。

结论 3 连续周期函数之原函数必为周期函数与线性数之和, 且周期不变。

连续周期函数 $f(x)$ 之原函数为周期函数的充要条件是

$$\int_0^T f(x)dx = 0, \text{ 其中 } T > 0 \text{ 为周期。}$$

结论 4 有第一类间断点的函数没有原函数。

结论 5 有第二类间断点的函数可以有原函数。

结论 6 变限积分表示的函数不一定是原函数。

注: 以上结论中每年会从其中取出 1-3 个考点。

(9) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于【 C 】

- (A) $\ln 3 - 1$ (B) $-\ln 3 - 1$
(C) $-\ln 2 - 1$ (D) $\ln 2 - 1$

【解析与点评】 $h'(x) = g'(x)e^{1+g(x)}$, $h'(1) = g'(1)e^{1+g(1)} = 1$,

由 $g'(1) = 2$ 得到 $1 + g(1) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, $g(1) = -1 - \ln 2$, 选 (C)。

(10) 函数 $y = c_1 e^x + c_2^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是[D]

- (A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$ (B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$
(C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ (D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$

【解析与点评】 本题考查线性常系数非齐次方法的基本知识, 由题设可知特征根为 1 和 -2, 故特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 因此相应的线性齐次方程是

$y'' + y' - 2y = 0$ 这样就排除了 (A), (B); 再由非齐次方程之解的形式可知, $\alpha = 1$ 为

单根，方程的非齐次项应是 Ae^x 型，从而选 (D)。类似题目参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第八讲例 3, 4; 或水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 11-8 等题目。

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于【 C 】

$$(A) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

【解析与点评】本题二重积分基本题，由极坐标化直角坐标，直接画草图按先 x 后对 y 的积分次序即得。参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第十一讲例 6，例 13 等题目。

(12) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'(x, y) \neq 0$ 。已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是【 D 】

$$(A) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(B) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) = 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

$$(C) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$(D) \text{ 若 } f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 则 } f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

【解析与点评】【解法 1】构造格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

对 (2) 由于 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，得到 $\lambda = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_x(x_0, y_0)} = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$ ，

从而有 $f'_x(x_0, y_0) \cdot \varphi'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0)$

当 $f'_x(x_0, y_0) = 0$ 时，可推出 $f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$ ，而由此推不出：

$$f'_y(x_0, y_0) \neq 0, \text{ 或 } f'_y(x_0, y_0) = 0, \text{ 因而否定 (A) 和 (B).}$$

当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 加上 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 可推出 $f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 由此可推

出: $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。

【解法 2】由极值点必要条件得到

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x_0} = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y' \Big|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = 0$$

当 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 及 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 可推出 $f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, 而由此推不

出: $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 或 $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 因而否定 (A), (B)。

当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 加上 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 可推出

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot \varphi'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0,$$

由此可推出: $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。因而选 (D)。

【解法 3】由多元函数条件极值点必要条件的几何意义可直接由 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 和 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 直接得到 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 。

该题考查条件极值必要条件的一些代数性质, 从代数解, 除拉格朗日条件外, 其它运用的都是初等代数知识。若从多元函数条件极值点必要条件的几何意义来考查, 做法就很简单, 有关用这方面内容来设计的题目, 可参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 16-1。

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

【A】

【解析与点评】 本题主要考查向量组线性相关的判断。可以用定义, 也可以转化为矩阵的秩来做, 在水木艾迪辅导班上这类问题的分析方法是重点辅导的内容。

【解法 1】利用定义。

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 k_1, k_2, \dots, k_s 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0,$$

用 A 左乘等式两边, 得 $k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_s A\alpha_s = 0$,

于是 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

【解法 2】 利用矩阵的秩.

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s) = r(A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s$$

所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关. 选(A).

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2

列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^T AP$.

(D) $C = PAP^T$.

【 B 】

【解析与点评】 本题主要考查矩阵的初等变换, 初等矩阵, 以及初等变换和初等矩阵的联系. 水木艾迪辅导班春季班强化班都有专题进行辅导. 只要掌握我们的例题的分析方法, 这类题就能迎刃而解.

解: 依题意, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = B$, $B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$,

又 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$, 于是 $C = PAP^{-1}$. 选(B).

三、解答题(共 94 分)

(15) (10 分) 试确定 A, B, C 的常数值, 使 $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$ 其中 $o(x^3)$

是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 的高阶无穷小.

【解析与点评】 将 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 代入已知等式得

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right][1 + Bx + Cx^2] = 1 + Ax + o(x^3)$$

整理并比较两边同次幂函数得

$$1 + (B+1)x + \left(C + B + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$$

$$B + 1 = A$$

$$C + B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0$$

$$\text{式 - 得 } \frac{B}{2} + \frac{1}{3} = 0, B = -\frac{2}{3}, A = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

参见清华大学出版社《考研通用教材》(考研数学应试导引与进阶)微积分(上)例 6.48, 水木艾迪 2006 考研数学强化班第 1 讲例 40 等题。

$$(16)(10 \text{ 分}) \text{ 求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$$

$$\text{【解析与点评】【解法 1】} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = \int \arcsin e^x de^{-x} = -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

对第二项取变换 $e^x = \sin t, e^x dx = \cos t dt,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{\cot}{\sin t} \cdot \frac{1}{\cos t} dt = \int \sec t dt = \ln|\csc t - \cot t| + C$$

$$= -x + \ln(1 - \sqrt{1 - e^{2x}}) + C$$

$$\text{因此 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -e^{-x} \arcsin e^x - x + \ln(1 - \sqrt{1 - e^{2x}}) + C$$

$$\text{【解法 2】原式} = \int \arcsin e^x de^{-x} = -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

$$= -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{e^{-2x} - 1}} de^{-x}$$

$$= -e^{-x} \arcsin e^x - \ln|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}| + C$$

【解法 3】取 $e^x = t$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{\arcsin e^x}{(e^x)^2} de^x = \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt$$

$$= -\int \arcsin t d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{tdt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{令 } \sqrt{1-t^2} = u ,$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{\arcsin t}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{(-2udu)}{u(1-u^2)} = -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1} \right| + C$$

出自清华大学出版社水木艾迪 2006 考研数学《考研通用教材》(刘坤林等编写: 考研数学应试导引与进阶) 微积分(上) 例 5.20, 亦为水木艾迪 2006 考研数学强化班第 3 讲例 15。还可参见清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程微积分上》(刘坤林、谭泽光编写) 第 7 章部分例题。

(17)(10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy .$$

【解析与点评】利用对称性, 推出 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$;

$$\text{这样, } I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2 .$$

这是很典型的二重积分计算题, 几乎所有微积分参考书中都有。也可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第十一讲例 17

(18)(12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$ 。

求: () 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之。

$$() \text{ 计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} .$$

【解析与点评】(1) $x_2 = \sin x_1, 0 < x_2 \leq 1$, 因此当 $n \geq 2$ 时

$x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$, $\{x_n\}$ 单调减少。又 $x_n \geq 0$, 即 $\{x_n\}$ 有下界, 有极限存在准则,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在, 再由极限的唯一性, 将递推公式两边取极限得 $A = \sin A$, 解得 $A = 0$ 。

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}, \text{ 为 "1}^\infty \text{ 型}$$

(方法1) 对离散型不能直接用洛必达法则, 先考虑

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}, \text{ 由复合极限定理, 只需考虑}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \frac{\sin t - t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{3t^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

(方法2) 利用重要极限凑成标准型

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{\sin t - t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t - t}} \right\}^{\frac{\sin t - t}{t} \frac{1}{t^2}}$$

由复合极限定理, 再考虑如下极限即可:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \frac{\sin t - t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{3t^2} = -\frac{1}{6}.$$

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 1-7, 基础班例 4.41, 强化班第 1 讲例 14, 例 19, 例 23 等题目。还可参见清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程 微积分上》(刘坤林、谭泽光编写) 第 5 章综例 5.4.8。

(19)(10分) 证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \frac{1}{\pi a}$

【解析与点评】 此题属于水木艾迪 2006 考研数学冲刺班 36 计之五的典型例题, 即移项做辅助函数, 再利用值加增减性分析法是证明等式与不等式的重要手段和技巧。

做辅助函数: $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$

只需证明 $0 < a < x < \pi$ 时 $f(x)$ 严格单调增加。

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi$$

$$= x \cos x - \sin x + \pi$$

$$f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -\sin x < 0$$

于是 $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f'(\pi) = \pi \cos \pi + \pi = 0$ (终值)

因此 $0 < a < x < \pi$ 时 $f'(x) > f'(\pi) = 0$, 即 $f(x)$ 严格单调增加。

令 $x = b$, 得到 $f(b) > f(a)$ 。

参见水木艾迪 2006 考研数学冲刺班 36 计之五详细阐述的方法与例题, 例 5-6, 例 5-7, 例 5-8, 强化班第 2 讲例 31、34、38 等题。

(20)(12分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $Z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

() 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ 。

() 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$ 求函数 $f(u)$ 的表达式。

【解析与点评】 () $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)} \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

同理由轮换对称性得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 左端, 得 $f''(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

因此得微分方程 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ 。

() 【解法 1】 看作高阶可降阶方程:
$$\begin{cases} f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0 \\ f(1) = 0, f'(1) = 1 \end{cases}$$

令 $f'(u) = p$, 则 $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}; \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{du}{u} + c$

$$\ln|p| = -\ln|u| + c, f'(u) = p = \frac{c}{u}$$

$$f'(1) = 1, c = 1, f(u) = \ln u + c_2,$$

再由 $f(1) = 0$, 得 $c_2 = 0$, 于是 $f(u) = \ln u$ 。

【解法 2】 看作欧拉方程:
$$\begin{cases} u^2 f''(u) + u f'(u) = 0 \\ f(1) = 0, f'(1) = 1 \end{cases}, u \in (0, +\infty)$$

令 $f(u) = u^\lambda$, 特征方程 $\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$, 即 $\lambda^2 = 0$, 特征根 $\lambda = 0, 0$ 。

微分方程的解: $f(u) = c_1 + c_2 \ln u$, 代入初始条件, 于是 $f(u) = \ln u$

【解法 3】 看作全微分方程:
$$\begin{cases} u f''(u) + f'(u) = 0 \\ f(1) = 0, f'(1) = 1 \end{cases}, u \in (0, +\infty)$$

$$\begin{cases} (u f'(u))' = 0 \\ f(1) = 0, f'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u f'(u) = C \\ f(1) = 0, f'(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(u) = 1/u \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(u) = \ln u$$

这是多元微分学与微分方程综合题, 可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第八讲例 7 等。

(21)(12分) 已知曲线 L 的方程
$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$$

(I) 讨论 L 的凹凸性

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程

(III) 求此切线与 L (对应 $x \leq x_0$ 部分) 及 x 轴所围的平面图形的面积

【解析与点评】(I) $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 4 - 2t, \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left(-\frac{2}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{1}{t^3} < 0 (t > 0 \text{ 处})$$

\therefore 曲线 L (在 $t > 0$ 处) 是凸

(II) 切线方程为 $y - 0 = \left(\frac{2}{t} - 1\right)(x + 1)$, 设 $x_0 = t_0^2 + 1, y_0 = 4t_0 - t_0^2$,

$$\text{则 } 4t_0 - t_0^2 = \left(\frac{2}{t_0} - 1\right)(t_0^2 + 2), 4t_0^2 - t_0^3 = (2 - t_0)(t_0^2 + 2)$$

$$\text{得 } t_0^2 + t_0 - 2 = 0, (t_0 - 1)(t_0 + 2) = 0 \quad \because t_0 > 0 \therefore t_0 = 1$$

点为 $(2, 3)$, 切线方程为 $y = x + 1$

(III) 设 L 的方程 $x = g(y)$

$$\text{则 } S = \int_0^3 [(g(y) - (y-1))] dy$$

$$t^2 - 4t + y = 0 \quad \text{解出 } t = 2 \pm \sqrt{4-y} \quad \text{得 } x = (2 \pm \sqrt{4-y})^2 + 1$$

由于 $(2, 3)$ 在 L 上, 由 $y = 3 \quad x = 2 \quad x = (2 - \sqrt{4-y})^2 + 1 = g(y)$

$$S = \int_0^3 [(9-y-4\sqrt{4-y}) - (y-1)] dy$$

$$= \int_0^3 (10-2y) dy - 4 \int_0^3 \sqrt{4-y} dy$$

$$= (10y - y^2) \Big|_0^3 + 4 \int_0^3 \sqrt{4-y} d(4-y) = 21 + 4 \times \frac{2}{3} \times (4-y)^{3/2} \Big|_0^3$$

$$= 21 + \frac{8}{3} - \frac{64}{3} = 3 - \frac{2}{3}$$

水木艾迪 2006 考研数学强化班第 2 讲例 4 与例 5 等题目。

(22) (9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 - bx_4 = 1 \end{cases} \quad \text{有 3 个线性无关的解}$$

() 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

() 求 a, b 的值及方程组的通解 .

【解析与点评】 本题考查矩阵的秩, 非齐次线性方程组的求解等. 涉及的知识点有非齐次线性方程组的解的性质, 解的结构, 齐次线性方程组的基础解系, 向量组的线性相关性, 矩阵的秩的定义, 用初等变换求解线性方程组等. 所有这些都是我们辅导班的重点内容。

[解] () 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解, 则 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解. 于是 $Ax = 0$ 的基础解系中解的个数不少于 2, 即 $4 - r(A) \geq 2$, 从而

$r(A) \leq 2$. 又 A 有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 于是 $r(A) \geq 2$, 所以 $r(A) = 2$.

() 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & -b-a & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & -b-5+4a & 4-2a \end{pmatrix}$$

由 $r(A) = 2$, 得出 $a = 2, b = 3$. 代入后继续作初等行变换:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$x = (2, -3, 0, 0)^T + k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(4, -5, 0, 1)^T$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

[解毕]

(23)(9分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$,

$\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解,

() 求 A 的特征值与特征向量;

() 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

【解析与点评】 本题考查实对称矩阵的性质, 矩阵的特征值与特征向量, 施密特正交化以及矩阵的相似对角化等. 矩阵 A 有特征值 0, 以及 0 的特征向量是通过齐次线性方程组的解的形式给出的. 这种类型的问题我们在辅导班上都有过分析, 只要将每个基本的知识都会灵活应用, 这道题也不难解决.

【解】 () 由题设 A 的行和均为 3, 有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以, $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量.

又 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的线性无关的两个解, 即 α_1, α_2 是 A 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量. 由此可知, 特征值 0 的代数重数不小于 2.

综合之, A 的特征值为 0, 0, 3. 属于 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 k_1, k_2 是不全为零的常数; 属于 3 的特征向量为 $k\alpha_3$, 其中 k 是非零常数.

() 将 α_1, α_2 正交化,

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

单位化

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^T, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

$$\text{令 } Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \text{ 则有 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

FREEKAOYAN