2006 年全国硕士研究生入学考试数学（一）

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

（2）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

（3）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le 1$）的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$

________.

（4）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $z=$________.

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$

________.

（6）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,\ 3]$ 上的均匀分布，则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$________.

二、选择题

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

（A）$0<dx<\Delta y.$　　（B）$0<\Delta y<dy.$

（C）$\Delta y<dy<0.$　　（D）$dy<\Delta y<0.$　　【　　】

（8）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$　　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$　　（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$　　【　　】

（9）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　　　【　　】

（10）设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y^1(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

（A）若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

（B）若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$.

（C）若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

（D）若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$.　　　　【　　】

（11）设 $a_1, a_2, \cdots, a,$ 均为 n 维列向量，A 是 $m \times n$ 矩阵，下列选项正确的是

（A）若 $a_1, a_2, \cdots, a,$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa,$ 线性相关.

（B）若 $a_1, a_2, \cdots, a,$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa,$ 线性无关.

（C）若 $a_1, a_2, \cdots, a,$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa,$ 线性相关.

（D）若 $a_1, a_2, \cdots, a,$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa,$ 线性无关.　　　　【　　】

（12）设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

（A）$C = P^{-1}AP$.　　　　（B）$C = PAP^{-1}$.

（C）$C = P^T AP$.　　　　（D）$C = PAP^T$.　　　　【　　】

（13）设 A, B 为随机事件，且 $P(B) > 0, P(A | B) = 1$，则必有

（A）$P(A \cup B) > P(A)$.　　　　（B）$P(A \cup B) > P(B)$.

（C）$P(A \cup B) = P(A)$.　　　　（D）$P(A \cup B) = P(B)$.　　　　【　　】

（14）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且

$$P\{| X - \mu_1 | < 1\} > P\{| Y - \mu_2 | < 1\},$$

（A）$\sigma_1 < \sigma_{2.}$　　（B）$\sigma_1 > \sigma_{2.}$

（C）$\mu_1 < \mu_{2.}$　　（D）$\mu_1 > \mu_{2.}$　　【　　】

三 解答题

15 设区域 D=$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$ 。

16 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{\pi+1}=\sin x_n\,(n=1,2,...)$ 。

求:(Ⅰ)证明$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$存在,并求之 。

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n{}^2}}$ 。

17 将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数 。

18 设函数 $f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$

(Ⅱ)若 $f(1)=0, f'(1)=1,$求函数$f(u)$的表达式.

19 设在上半平面 D=$\left\{(x,y)\middle|y>0\right\}$内,数 $f(x,y)$是有连续偏导数,且对任意的 t>0 都有

$f(tx,ty)=t^2f(x,y).$

证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$

20 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1\end{cases}\text{有3个线性无关的解}$$

Ⅰ证明方程组系数矩阵 A 的秩$r(A)=2$

Ⅱ求a,b的值及方程组的通解

21 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线

性方程组 Ax=0 的两个解，(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量 （Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 A,使得 $Q^T AQ = A$.

22 随机变量 x 的概率密度为 $f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 令$y=x^2,F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数.

(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

（Ⅱ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$

23 设总体 X 的概率密度为 $F(X,0)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 其中θ是未知参数$(0<\theta<1)$,

$X_1,X_2...,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值$x_1,x_2...,x_n$中小于1的个数,求θ的最大似然估计.

2006 年考研数学试卷

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ___2___

$Q\ \ln(1+x):\ x,1-\cos x:\ \dfrac{1}{2}x^2$ （当$x\to 0$时）

（2）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{y=cxe^{-x}(x\neq 0)}$ ，这是变量可分离方程。

（3）设 Σ 是锥面 Z=$\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le Z\le 1)$ 的下侧，则

$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$ __2π__

补一个曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$ 上侧

$$P=x,\qquad Q=2y,\qquad R=3(z-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2+3=6$$

$\therefore\ \iint\limits_{\Sigma}\ +\iint\limits_{\Sigma_1}\ =\iiint\limits_{\Omega}6dxdydz$ （Ω 为锥面 Σ 和平面 Σ_1 所围区域）

$=6V$ （V 为上述圆锥体体积）

$=6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}\times dydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$

（$\because$ 在 Σ_1 上：$z=1,dz=0$）

（4）点 $(2,1,0,)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$ __$\sqrt{2}$__

$$d=\frac{|3\times 2+4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\frac{10}{\sqrt{50}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\sqrt{2}}$$

二、选择题

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Vx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Vy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $Vx>0$，则[A]

(A) $0<dy<Vy$ (B) $0<Vy<dy$ (C) $Vy<dy<0$ (D) $dy<Vy<0$

因为 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加

$f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 是凹的

又$\Delta x>0$,故$0<dy<\Delta y$

(8)设$f(x,y)$为连续函数,则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$等于[C]

(A)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　(B)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　(D)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(9)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则级数　[D]

$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛　　$(B)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛

$(C)\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　$(D)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛　　($\because\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$也收敛)

(10)设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数,且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$,已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点,下列选项正确的是[D]

(A)若$f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(B)若$f_x'(x_0,y_0)=0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)=0$　　(D)若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

构造格朗日乘子法函数$F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases}F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 & (1)\\ F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 & (2)\\ F_\lambda'=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

今$\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$,$\therefore\lambda=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$代入(1)得$f_x'(x_0,y_0)=\dfrac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$

今 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$　　故选$[D]$

三、解答题

(15) 设区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$,计算二重积分$I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$

解:　　$\because\ \iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$

$$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(16) 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,\ x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$

求　(1)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在, 并求之

(2)计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$

解: (1)$\because x_2=\sin x_1,\therefore 0<x_2\le 1$,因此当$n\ge 2$时

$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n,\{x_n\}$单调减少

又$x_n\ge 0,\therefore\{x_n\}$有下界，根据准则1,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在, 递推公式两边取极限得

$A=\sin A,\ \therefore A=0$

(2)原式=$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$,为"$1^\infty$"型

$\because$ 离散型不能直接用洛必达法则

先考虑$\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\left[1-\frac{t^2}{2}+0(t^2)\right]-\left[t-\frac{t^3}{6}+0(t^3)\right]}{2t^3}}=e^{\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

(17) 将函数$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$展开成x的幂极数

解: $f(x)=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{1+x}$

$A(1+x)+B(2-x)=x$　　令$x=2$,　　$3A=2$,　　$A=\frac{2}{3}$

令$x=-1$,　　$3B=-1$,　　$B=-\frac{1}{3}$

$$f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2-x)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{2})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{[1-(-x)]}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n}+(-1)^{n+1}\right]x^n,\qquad |x|<1$$

（18）设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且$Z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

（I）验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$

（II）若 $f(1)=0, f'(1)=1$ 求函数 $f(u)$的表达式

证：（I）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

代入$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得$f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\dfrac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$\therefore f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$成立

（II）令 $f'(u)=p$,则$\dfrac{dp}{du}=-\dfrac{p}{u};\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{du}{u}+c$

$\ln|p|=-\ln|u|+c,\therefore f'(u)=p=\dfrac{c}{u}$

Q $f'(1)=1, c=1, f(u)=\ln|u|+c_2$,由$f(1)=0$,得$c_2=0$ 于是$f(u)=\ln|u|$

（19）设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意 $t>0$

都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$

证明：对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，

都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$

证：把 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$两边对t求导

得：$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2tf(x,y)$

令 $t=1$，则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$

再令 $P=yf(x,y),\ \ Q=-xf(x,y)$

所给曲线积分等于 0 的充分必要条件为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y)$

要求 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 成立，只要 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$

我们已经证明，$\therefore\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，于是结论成立。

线代

(5) 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 2 阶矩阵 B 满足 $BA=B+2E$, 则$|B|=$______.

解: 由 $BA=B+2E$ 化得 $B(A-E)=2E$, 两边取行列式, 得

$$|B||A-E|=|2E|=4,$$

计算出$|A-E|=2$, 因此$|B|=2$.

(11) 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 都是 n 维向量，A 是 m×n 矩阵，则（　）成立.

(A) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

(B) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

(C) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

(D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关, 则 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

解: (A)

本题考的是线性相关性的判断问题, 可以用定义解.

若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关, 则存在不全为 0 的数 $c_1, c_2, \cdots, c_s$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0,$$

用 A 左乘等式两边, 得

$$c_1A\boldsymbol{\alpha}_1+c_2A\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_sA\boldsymbol{\alpha}_s=0,$$

于是 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

如果用秩来解, 则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质, 它们是:

1. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)=s$.

2. $r(AB)\le r(B)$.

矩阵$(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s)=A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)$, 因此

$$r(A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, A\boldsymbol{\alpha}_s)\le r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s).$$

由此马上可判断答案应该为(A).

(12) 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列上得 B, 将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列上得 C. 记

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$ 则

(A) $C=P^{-1}AP$.　(B) $C=PAP^{-1}$.

(C) $C=P^{T}AP$.　(D) $C=PAP^{T}$.

解: (B)

用初等矩阵在乘法中的作用得出

$$B=PA,$$

$$C=B\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=BP^{-1}=PAP^{-1}.$$

(20) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

① 证明此方程组的系数矩阵 A 的秩为 2.

② 求 a,b 的值和方程组的通解.

解:① 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程组的 3 个线性无关的解,则$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$是$AX=0$的两个线性无关的解.于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2,即 $4-r(A)\geq 2$,从而 $r(A)\leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的,所以 $r(A)\geq 2$.

两个不等式说明 $r(A)=2$.

② 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$(A|\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{array}\right),$$

由 $r(A)=2$,得出 a=2,b=-3.代入后继续作初等行变换:

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4,\\x_2=-3+x_3-5x_4,\end{cases}$$

求出一个特解$(2,-3,0,0)^T$和 $AX=0$ 的基础解系$(-2,1,1,0)^T,(4,-5,0,1)^T$.得到方程组的通解:

$(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T$, c_1,c_2任意.

(21) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3,向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.

① 求 A 的特征值和特征向量.

② 求作正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ,使得

$$Q^TAQ=\Lambda.$$

解:① 条件说明 $A(1,1,1)^T=(3,3,3)^T$,即 $\alpha_0=(1,1,1)^T$是 A 的特征向量,特征值为 3.又α_1,α_2都是 $AX=0$ 的解说明它们也都是 A 的特征向量,特征值为 0.由于α_1,α_2线性无关, 特征值 0 的重数大于 1.于是 A 的特征值为 3,0,0.

属于 3 的特征向量:$c\alpha_0$, $c\neq 0$.

属于 0 的特征向量:$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$, c_1,c_2不都为 0.

② 将α_0单位化,得$\eta_0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对α_1,α_2作施密特正交化,的$\eta_1=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$, $\eta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q=(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$,则 Q 是正交矩阵,并且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

概率

（**6**）$\frac{1}{9}$

（**13**）C

（**14**）A

（**22**）

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量（X,Y）的分布函数。

（Ⅰ）求 Y 的概率密度；（Ⅱ）$F(-\frac{1}{2},4)$

解：

（Ⅰ）$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}0,y<0\\ (1)\text{式},0\le y<1\\ (2)\text{式},1\le y<4\\ 1,4\le y\end{cases}$

$(1)\text{式}=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$；

$(2)\text{式}=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$。

所以：$f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}},1\le y<4\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手，对 y 进行适当的讨论即可，在新东方的辅导班里我也经常讲到，是基本题型。

（Ⅱ）

$F(-\frac{1}{2},4)$

$=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 4)=P(X\le-\frac{1}{2},X^2\le 4)=P(X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le 2)=P(-2\le X\le-\frac{1}{2})$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$$。

（**23**）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta,0<x<1\\1-\theta,1\le x\le 2\\0,\text{其他}\end{cases}$，其中 θ 是未知参数（0< θ <1）。

$X_1,X_2,\Lambda\ X_n$ 为来自总体的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\Lambda\ x_n$ 中小于 1 的个数。求 θ 的最大似然估计。

解：

对 样 本 $x_1,x_2,\Lambda\ x_n$ 按 照 <1 或 者 ≥1 进 行 分 类： $x_{p1},x_{p2},\Lambda\ x_{pN}$ <1，$x_{pN+1},x_{pN+2},\Lambda\ x_{pn}$ ≥1。

似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\theta^N(1-\theta)^{n-N}，\ x_{p1},x_{p2},\Lambda\ x_{pN}<1,x_{pN+1},x_{pN+2},\Lambda\ x_{pn}\ge 1\\0,\text{其他}\end{cases}$,

在 $x_{p1},x_{p2},\Lambda\ x_{pN}$ <1，$x_{pN+1},x_{pN+2},\Lambda\ x_{pn}$ ≥1 时，

$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$，

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0$，所以 $\theta_{\text{最大}}=\frac{N}{n}$。