

2007 年全国硕士入学统考数学(四)试题及答案

一、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$
 (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

【分析】 $1 - e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}} - 1) \sim -\sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0^+)$

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 = (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x \quad (x \rightarrow 0^+)$$

因此选 (B)

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在
 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在.

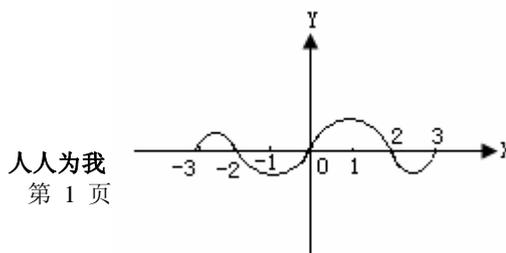
【分析】 设 $f(x) = |x|$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = 0 \text{ 存在, 但 } f'(0) \text{ 不存在}$$

因此 (D) 是错误的. 选 (D)。

(3) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$



$$(B) \quad F(3) = \frac{5}{4} F(2).$$

$$(C) \quad F(-3) = \frac{3}{4} F(2).$$

$$(D) \quad F(-3) = -\frac{5}{4} F(2)$$

【分析】注意，大、小半圆的面积分别为 π 与 $\frac{1}{4}\pi$ 。

按定积分的几何意义知，当 $x \in [0, 2]$ 时 $f(x) \geq 0$ ，当 $x \in [2, 3]$ 时 $f(x) \leq 0$ 。

$$\Rightarrow \quad F(3) = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \pi,$$

$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \pi.$$

因为 $f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 为偶函数。

$$\Rightarrow \quad F(-3) = F(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \pi, \quad F(-2) = F(2) = \frac{1}{2} \pi.$$

因此 $F(-3) = \frac{3}{4} F(2)$. 选 (C)

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

$$(A) \quad \int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx \quad (B) \quad \int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$$

$$(C) \quad \int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx \quad (D) \quad \int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$$

【分析】这是交换积分顺序的问题。先将二次积分表成

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

由累次积分限确定区域 D 如图所示。

记 $y = \sin x (x \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$ 的反函数是 $x = \varphi(y)$ ，则改换积分顺序得

$$I = \int_0^1 dy \int_{\varphi(y)}^{\pi} f(x, y) dx$$

由此知 (C), (D) 不正确

现在的关键是求出 $y = \sin x (x \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$ 的反函数:

$$y = \sin x = \sin(\pi - x), \text{ 当 } \frac{\pi}{2} = x = \pi \text{ 时 } 0 = \pi - x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi - x = \arcsin y, \text{ 即 } x = \pi - \arcsin y.$$

因此 $I = \int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$. 选 (B)

(5) 设某商品的需求函数 $Q=160-2p$, 其中 Q, p 分别表示需要量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是

- (A) 10. (B) 20. (C) 30. (D) 40.

【分析】 按需求弹性的定义可得

$$\left| \frac{EQ}{Ep} \right| = \left| \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right| = \left| \frac{p}{160-2p} \cdot (-2) \right| = \frac{p}{160-2p},$$

$$\text{令 } \left| \frac{EQ}{Ep} \right| = 1 \text{ 即 } \frac{p}{160-2p} = 1 \text{ 可解出 } p = 40 \text{ . 故选(D)}$$

(6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐进线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【分析】 只有间断点 $x=0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right) = \infty; \text{ 故 } x=0 \text{ 为垂直渐进线.}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right) = 0 + \ln 1 = 0,$$

故 $x \rightarrow -\infty$ 时有水平渐进线 $y=0$.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right) = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - \ln e^x \right) = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+e^x}{e^x} = 0,$$

故 $x \rightarrow +\infty$ 时有渐进线 $y=x$.

因此选(D).

(7) 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- (A) $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1,$ (B) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1,$
 (C) $a_1 - 2a_2, a_2 - 2a_3, a_3 - 2a_1,$ (D) $a_1 + 2a_2, a_2 + 2a_3, a_3 + 2a_1,$

【分析】 因为

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_1) = 0$$

所以向量组 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_1$, 线性相关, 故选 (A).

率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(X|Y)$ 为

- (A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

【分析】 由于 (X, Y) 服从二维正态分布, 因此从 X 与 Y 不相关可知 X 与 Y 相互独立, 于是有

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

应选 (A)

若仔细分析, 由于 X 与 Y 不相关, 即 $\rho=0$, 因此 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

而 X, Y 的边缘密度分别为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}, \quad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}},$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} = f_X(x).$$

也可知选 (A)

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】 注意 $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = \frac{x^3}{2^x} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + x^3 2^{-x}}$, 且由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2^x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2^x \ln^2 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2^x \ln^3 2} = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1}{1 + x^3 2^{-x}} = 1, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = 0.$$

又因 $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}$, 利用无穷小量有界变量的乘积是无穷小量可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0$$

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】 用归纳法求解.

$$y' = -2(2x+3)^{-2}, y'' = 2^2(-1)^2 2(2x+3)^{-3}, y^{(3)} = 2^3(-1)^3 3!(2x+3)^{-4}.$$

易归纳证得 $y^{(n)} = 2^n(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}$.

因此 $y^{(n)}(0) = (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} n!$.

(13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】 由多元复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{x}{y} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】 本题是求齐次微分方程的特解问题. 令 $y = xu$, 于是 $dy = xdu + udx$, 代入原方程可化为

$$x \frac{du}{dx} + u = u - \frac{1}{2} u^3 \Leftrightarrow \frac{2du}{u^3} + \frac{dx}{x} = 0.$$

两端求积分得 $-\frac{1}{u^2} + \ln|x| = C$ 即 $\ln|x| = C + \frac{x^2}{y^2}$.

在通解中令 $x=1, y=1$ 可确定常数 $C = -1$ 于是 $\frac{x^2}{y^2} = 1 + \ln|x|$ 所求特解为整理得

$$y^2 = \frac{x^2}{1 + \ln|x|}.$$

(15) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为 _____

【分析】 因为 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可以知秩 $r(A^3) = 1$

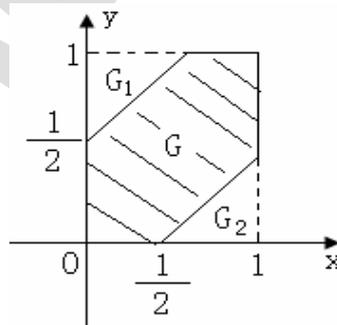
(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____

【分析】 这是一个几何型概率的计算题。设所取的两个数分别为 x 和 y , 则以 x 为横坐标以 y 纵坐标的点 (x, y) 随机地落在边长为 1 的正方形内 (如图所示), 设事件 A 表示 “所取两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ ”, 则样本空间 $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$; 事件 A 的样本点集合为区域 G 中所有的点, 而

$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, |y - x| < \frac{1}{2}\}$. 区域 Ω 的面积 $S_{\Omega} = 1$, 区域 G 的面积

$$S_G = S_{\Omega} - S_{G_1} - S_{G_2} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

因此 $P(A) = \frac{S_G}{S_{\Omega}} = \frac{3}{4}$.



三、解答题: 17—24 小题, 共 86 分。请将解答写在答题纸指定的位置, 解答应写出文字说明、证明的过程或演算的步骤。

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性。

【分析】 所求的隐函数 $y = y(x)$ 满足方程 $y \ln y - x + y = 0$ 与条件 $y(1) = 1$ 由方程 $y(x)$ 知具有二阶连续的导数, 从而要判断 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性, 只需求出 $y''(1)$ 。

【解】 将方程看成关于 x 的恒等式, 两端对 x 求导数得

$$y' \ln y + y' - 1 + y' = 0$$

整理得 $y'(\ln y + 2) = -1$,

(*)

在(*)式中令 $x=1, y=1$, 可得 $y'(1) = \frac{1}{2}$. 将(*)式两端再对 x 求导数, 得

$$y''(\ln y + 2) + y' \frac{y'}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{(y')^2}{y(2 \ln y)}.$$

在上式中令 $x=1, y=1, y'(1) = \frac{1}{2}$. 即得 $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$. 由 $y''(x)$ 的连续性知存在 $x=1$ 的一个领域, 在此领域中 $y''(x) < 0$ 即曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近是凸弧.

(18) (本题满分 10 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

【分析与求解】 D 如图 (1) 所示, 它关于 x, y 轴对称, 又 $f(x, y)$ 对 x, y 均为偶函数 \Rightarrow

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 的第一象限部分.

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成(如图(2)): $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, 且

$$D_{11}: |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad D_{12}: 1 < |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

于是 $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$. 而

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{12}.$$

$$\iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma \xrightarrow[\text{变换}]{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} r dr$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d(\tan \frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2 \tan \frac{\theta}{2}} = \int_0^1 \frac{2du}{1 - u^2 + 2u} = \int_0^1 \frac{2du}{2 - (u-1)^2} \\
 &\xleftrightarrow{\text{令 } u-1=t} \int_0^1 \frac{2dt}{2-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}+t} + \frac{1}{\sqrt{2}-t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1),
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\text{因此} \quad \iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) \right),$$

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【分析与证明】 令 $F(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 在题设条件下, 要证存在 $\xi \in (a, b), F''(\xi) = 0$. 已知 $F(a) = F(b) = 0$, 只须由题设再证 $\exists c \in (a, b), F(c) = 0$.

(I) 由题设 $\exists x_1 \in (a, b), M = \max_{[a, b]} f(x) = f(x_1), \exists x_2 \in (a, b), M = \max_{[a, b]} g(x) = g(x_2)$. 若 $x_1 = x_2$, 取 $c = x_1 = x_2, F(c) = 0$.

若 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, \quad F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0.$$

$$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2), F(c) = 0.$$

(II) 由 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, 对 $F(x)$ 分别在 $[a, c], [c, b]$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ 使得

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$$

再对 $F'(x)$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得

$$F''(\xi) = 0, \text{ 即 } f''(\xi) = g''(\xi).$$

(20) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2,$$

求 $f(x)$ 的表达式。

【解】 因为函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$ 令 $x=0$ 有 $f(0) = 0$ 。又因为

$$f(x) = x^2 \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x t^2 f'(t) dt + x^2$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x) &= x^2 f(t) \Big|_0^x - t^2 f(t) \Big|_0^x + 2 \int_0^x t f(t) dt + x^2 \\ &= x^2 f(x) - x^2 f(x) + 2 \int_0^x t f(t) dt + x^2, \end{aligned}$$

$$\text{即有 } f(x) = x^2 + 2 \int_0^x t f(t) dt.$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导有: } f'(x) = 2x + 2xf(x), \text{ 即 } \begin{cases} f'(x) - 2xf(x) = 2x, \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } f(x) = e^{\int 2x dx} \left(\int 2xe^{-\int 2x dx} dx + c \right) = e^{x^2} (-e^{-x^2} + c).$$

$$\text{由 } f(0) = 0 \text{ 可知 } c = 1 \text{ 所以 } f(x) = e^{x^2} (-e^{-x^2} + 1) = e^{x^2} - 1.$$

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共的解,求 a 的值及所有的公共解

【解】 将①与②联立, 加减消元有

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & M & 0 \\ 1 & 2 & a & M & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & M & 0 \\ 1 & 2 & 1 & M & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & M & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & M & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & M & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & M & a-1 \end{bmatrix},$$

如果 $a=1$, 则 $\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}$. 从而方程组的通解为 $k(1, 0, -1)^T$. 即是方程组①与②的公共解。

如果 $a=2$, 则 $\bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 1 & 1 & M & 0 \\ 0 & 0 & -1 & M & 1 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}$. 从而方程组的通解为 $(0, 1, -1)^T$. 即是方程组①与②的公共解。

解。

(22) (本题满分 11 分)

设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, a_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.

记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 a_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵 B .

【解】 (I) 由 $Aa = \lambda a$ 知 $A^n a = \lambda^n a$ 那么

$$Ba_1 = (A^5 - 4A^3 + E)a_1 = A^5 a_1 - 4A^3 a_1 + a_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)a_1 = -2a_1,$$

所以 a_1 是矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量。

类似地, 若 $Aa_2 = \lambda_2 a_2, Aa_3 = \lambda_3 a_3$, 有

$$Ba_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)a_2 = a_2, Ba_3 = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)a_3 = a_3,$$

因此, 矩阵 B 的特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1$.

由 A 是对称矩阵知矩阵 B 也是对称矩阵, 设矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么

$$a_1^T \beta = x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

所以矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的线性无关的特征向量是 $\beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因而, 矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量是 $k_1(1, -1, 1)^T$. 其中 k_1 是不为 0 的任意常数.

矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量是 $k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 k_2, k_3 是不全为 0 的任意常数.

(II) 由 $Ba_1 = -2a_2, B\beta_2 = \beta_2, B\beta_3 = \beta_3$ 有

$$B(a_1, a_2, a_3) = (-2a_1, \beta_2, \beta_3).$$

那么 $B = (-2a_1, \beta_2, \beta_3)(a_1, a_2, a_3)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $z = X + Y$ 的概率密度 $f_z(z)$

【解】 (I) $P\{X > 2Y\} = \iint_{\substack{x > 2y \\ 0 < x < 1, 0 < y < 1}} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2 - x - y) dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} - 5y + 4y^2 \right) dy = \frac{7}{24}.$$

(II) 如果已知 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_z(z)$ 可以直接用卷积公式求解.

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx.$$

由于被积函数只有在 $0 < x < 1, 0 < z-x < 1$ 即 $0 < x < z < x+1 < 2$ 时不为 0, 此时被积函数

$$f(x, z-x) = 2-x-(z-x) = 2-z.$$

当 $0 < x < 1$ 时, 如图

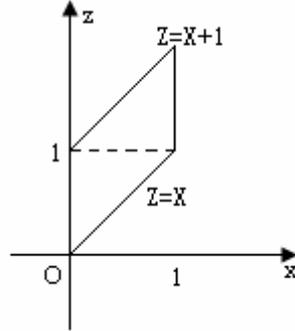
$$f_z(z) = \int_0^z (2-z) dx = z(2-z).$$

当 $1 \leq z < 2$ 时

$$f_z(z) = \int_{z-1}^1 (2-z) dx = (2-z)^2.$$

于是 Z 的概率密度为

$$f_z(z) = \begin{cases} z(2-z), & 0 < z < 1, \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$



(24) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U = \max\{x, y\}, V = \min\{x, y\}$ 。

- (1) 求 (U, V) 的概率分布;
- (2) 求 U 与 V 的协方差 $Cov(U, V)$ 。

【解】 (1) 由于 (U, V) 是二维离散型随机变量, 我们首先确定其可能取值, 再计算相应概率, 易见 (U, V)

只可能取 $(1, 1), (2, 1), (2, 2)$ 各值, 且

$$\begin{aligned} p\{U=1, V=1\} &= p\{\max(X, Y)=1, \min(X, Y)=1\} \\ &= p\{X=1, Y=1\} = p\{X=1\} p\{Y=1\} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\text{类似地 } p\{U=2, V=1\} = p\{\max(X, Y)=2, \min(X, Y)=1\}$$

$$= p\{X = 2, Y = 1\} + p\{X = 1, Y = 2\} = \frac{4}{9}$$

$$p\{U = 2, V = 2\} = p\{\max(X, Y) = 2, \min(X, Y) = 2\}$$

$$= p\{X = 2, Y = 2\} = \frac{1}{9}$$

于是 (U, V) 的概率分布如表所示

U \ V	1	2	$P\{U = i\}$
1	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$P\{V = j\}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	

(II) U 与 V 的边缘概率分布上表中的最后一列与最后一行, 据此

$$EU = \frac{4}{9} + \frac{10}{9} = \frac{14}{9}, EV = \frac{8}{9} + \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$$

$$E(UV) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 U_i V_j p_{ij} = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9},$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - EUEV = \frac{16}{9} - \frac{14}{9} \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{81}$$