2007 年全国硕士入学统考数学(二)试题及答案

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（**1**）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.　　[B]

【分析】 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}\quad(x\to 0^+)$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}\quad(x\to 0^+)$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x\quad(x\to 0^+)$$

因此选（B）

（**2**）函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A) 0.　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.　　[A]

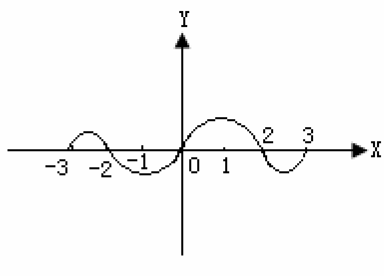
【分析】 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+ee^{-\frac{1}{x}}}{1-ee^{-\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right)=1,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}-e}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{e}{-e}\cdot 1=-1,$$

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。选（A）。

（**3**）如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间[－3, －2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[－2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周。设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则下列结论正确的是

（A）$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$



FREEKAOYAN

(B)　$F(3)=\frac{5}{4}F(2).$

(C)　$F(-3)=\frac{3}{4}F(2).$

(D)　$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$　　　　　　[　C　]

【分析】注意，大、小半圆的面积分别为π与$\frac{1}{4}\pi$。

按定积分的几何意义知，当$x\in[0,2]$时$f(x)\geq 0$，当$x\in[2,3]$时$f(x)\leq 0$。

$$\Rightarrow \qquad F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\frac{3}{4}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\pi.$$

因为$f(x)$为奇函数$\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)dt$为偶函数。

$$\Rightarrow \qquad F(-3)=F(3)=\frac{1}{2}\frac{3}{4}\pi, F(-2)=F(2)=\frac{1}{2}\pi.$$

因此　　$F(-3)=\frac{3}{4}F(2).$　选（C）

（**4**）设函数$f(x)$在 x=0 处连续，下列命题错误的是

(A)　若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

(C)　若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f^{'}(0)=0$存在

(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f^{'}(0)=0$存.　　[　D　]

【分析】　设$f(x)=|x|$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0 \text{存在，但} f^{'}(0) \text{不存在}$$

因此（D）是错误的。选（D）。

(5) 曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐进线的条数为

(A)　０.　　　　(B)　１.　　　　(C)　２.　　　　(D)　３.

【分析】　只有间断点$x=0$．由于

$\lim\limits_{x\to 0}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x))=\infty$; 故$x=0$为垂直渐进线.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)) = 0+\ln 1 = 0,$

故 $x\to-\infty$ 时有水平渐进线 $y=0.$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right) = 0+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x} = 1,$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x) = 0+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x} = 0,$$

故 $x\to+\infty$ 时有渐进线 $y=x.$
因此选(D).

（**6**）设函数 $f(x)$ 在（0，+∞）上具有二阶的导数，且 $f''(0)>0$ 令 $u_n = f(n)(n=1,2\Lambda)$，则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛。 (B) 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散。

(C) 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛。 (D) 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散。 [D]

【分析】 由 $f''(x)>0(x>0)\Rightarrow f'(x)$在（0，＋∞) 单调上升。$f(x)$ 只有以下三种情况:

（1）$\exists x_0\in(0,+\infty), f'(x_0)=0\Rightarrow f'(x)\begin{cases}<0, 0<x<x_{0,}\\ =0, \quad x=x_0\\ >0, \quad x>x_0\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)$ 在（0，x_0）↘，在$[x_0,+\infty)$↗, 又 $x>x_1>x_0$ 时

$f(x)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

（2）对所有 $x\in(0,+\infty), f'(x)>0\Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$↗且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

（3）对 $\forall x\in(0,+\infty), f'(x)<0, f(x)$ 在（0,＋∞）↘，则

或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\exists$或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 。

如， $f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{x^3}>0(x>0).$

$u_n = f(n)$↘， $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=0.$

FREEKAOYAN

又如， $f(x)=\frac{1}{x}-x \Rightarrow f''(x)=\frac{3}{x^3}>0(x>0),$

$$u_n = f(n)=\frac{1}{n}-n, \searrow \text{但} \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

$\Rightarrow (A),(B)$ 不正确

由（1），（2）$\Rightarrow$（C）不正确，而（D）正确。因此，选（D）。

（**7**）二元函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0,$ 且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$. [C]

【分析】 按可微性定义， $f(x,y)$ 在(0,0)可微 $\Leftrightarrow$

$$f(x,y)=f(0,0)+Ax+By+0(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad ((x,y)\to(0,0))$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$ 其中 A，B 是与 x,y 无关的常数。

题中（C）即 A=B=0 的情形。因此由（C）$\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在(0,0)可微，因此选（C）。

（**8**）设函数 $f(x,y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$. (D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$ [B]

【分析】 这是交换积分顺序的问题。先将二次积分表成

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)d\sigma,$$

由累次积分限确定区域 D 如图所示。

记 $y=\sin x(x\in[\frac{\pi}{2},\pi])$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$，则改换积分顺序得

$I=\int_0^1 dy\int_{\varphi(y)}^{\pi} f(x,y)dx$

由此知（C），（D）不正确

现在的关键是求出 $y=\sin x(x\in[\frac{\pi}{2},\pi])$ 的反函数：

$y=\sin x=\sin(\pi-x)$,当$\frac{\pi}{2}=\ x=\ \pi$时$0=\ \pi-x=\ \frac{\pi}{2}\Rightarrow \pi-x=\arcsin y$，即$x=\pi-\arcsin y.$

因此$I=\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$. 选（B）

.（**9**）设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1,$　　　　(B) $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1,$

(C) $a_1-2a_2,a_2-2a_3,a_3-2a_1,$.　　　　(D) $a_1+2a_2,a_2+2a_3,a_3+2a_1,$

【分析】因为

$(a_1-a_2)+a_2-a_3)+(a_3-a_1)=0$

所以向量组 $a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1,$ 线性相关，故选（A）.

,

至于（B）、（C）、（D）的线性相关性可以用 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(a_1,a_2,a_3)C$ 的方法来处理。例如

$$(a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，故知 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1,$ 线性相关。

FREEKAOYAN

（**10**）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 A 与 B

(A)　合同，且相似　　　　(B)　　合同但不相似

(C)　不和同，但相似.　　　　(D)　既不合同，也不相似　　[　B　]

【分析】 根据迹相等是两矩阵相似的必要条件，易见 A 和 B 肯定不相似。由此可以排除（A）与（C）。而合同的充要条件是有相同的正、负惯性指数。为此可以用特征值来加以判断。由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$

矩阵 A 的特征值为 3，3，0。故二次型 x^TAx 的正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，而二次型的正惯性指数也为 $p=2$，负惯性指数 $q=0$，所以 A、B 合同。故应选（B)。

二、**填空题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（**11**）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$__________

【**分析**】 原式 $\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)\cos x}{3x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+(1+x^2)\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}.$$

（**12**） 曲线$\begin{cases}x=\cos t-\cos^2 t\\ y=1+\sin t\end{cases}$,上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________

【**分析**】 先求切线斜率

$$k=\frac{dy}{dx}=\frac{y_1'}{x_1'}=\frac{\cos t}{-\sin t-2\cos t\sin t}=\frac{-1}{\tan t+2\sin t},$$

于是 $k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}$.因此法线斜率为 $1+\sqrt{2}$.

（**13**） 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$______

【**分析**】 用归纳法求解.

$$y'=-2(2x+3)^{-2},y''=2^2(-1)^2 2(2x+3)^{-3},y^{(3)}=2^3(-1)^3 3!(2x+3)^{-4}.$$

易归纳证得 $y^{(n)}=2^n(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}$.

因此 $y^{(n)}(0)=(-1)^n(\dfrac{2}{3})^n\dfrac{1}{3}n!$.

（**14**） 二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 y=___________

【**分析**】 特征方程 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ 的根为 $\lambda=1,\lambda=3$.

非齐次项 $e^{ax},a=2$ 不是特征根，非齐次方程有特解 $y^*=Ae^{2x}$. 代入方程得

FREEKAOYAN

$\left(4A-8A+3A\right)e^{2x}=2e^{2x}\Rightarrow A=-2.$

因此，通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{3x}-2e^{2x}$.

（15） 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数,$z=f(\frac{y}{x},\frac{x}{y})$,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_________

【分析】 由多元复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y})=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y})=\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u}+2\frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

（16） 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 A^3 的秩为_________

【分析】 因为 $A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，可以知秩 $r(A^3)=1$

三 、解答题：17－24 小题，共 86 分。请将解答写在答题纸指定的位置，解答应写出文字说明、证明的过程或演算的步骤。

（17）（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=\int_0^{\pi}t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数,求 $f(x)$.

【分析与求解】 对题设等式两边求导得

$f^{-1}(f(x))f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}.$

FREEKAOYAN

注意 $f^{-1}(f(x))=x.$

于是 $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x},$

$f(x)=\int\dfrac{d(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)+C(x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]).$

在原式中令 $x=0$ 得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt=0.$

由条件 $\Rightarrow f(0)=0.\quad \Rightarrow C=0,\Rightarrow f(x)=\ln(\sin x+\cos x).$

(18) **（本题满分 10 分）**

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0=\ x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

（Ⅰ）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小?并求此最小值,

【分析与求解】 （Ⅰ）$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}y^2(x)dx=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\dfrac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty}xda^{-\frac{x}{a}}$

$$=\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}a^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}.$$

（Ⅱ）$V'(a)=\pi\dfrac{2a\ln^2 a-2a^2\ln a\cdot\dfrac{1}{a}}{\ln^4 a}=2\pi a\dfrac{\ln a-1}{\ln^3 a}\begin{cases}<0, & 1<a<e\\ =0, & a=e\\ >0, & a>e\end{cases}$

$\Rightarrow a=e$ 时 $V(a)$ 取最小值 $V(e)=\pi e^2.$

(19) **（本题满分 11 分）**

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

【分析与求解】 令 $p=y'$ 得 $\dfrac{dp}{dx}(x+p^2)=p$.改写成

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p.$$

这是一阶线性方程,两边乘 $\dfrac{1}{p}(e^{-\int\frac{dp}{p}}\overset{\text{取}}{==}\dfrac{1}{|p|})$ 得

$$\frac{d}{dp}(\frac{x}{p})=1\overset{\text{积分}}{\Rightarrow}\qquad \frac{x}{p}=p+C_1.$$

FREEKAOYAN

由初值 $x=1$时$p=1\Rightarrow C_1=0 \qquad \Rightarrow x=p^2, p=\sqrt{x}.$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\overset{积分}{\Rightarrow} y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

由 $y(1)=1\Rightarrow \qquad C=\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}.$

(20) （**本题满分 10 分**）

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}, \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

【分析与求解】 由方程 $y-xe^{y-1}=1\Rightarrow y(0)=1,$

求导得 $y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0\Rightarrow y'(0)=1$

在求导得 $y''-2e^{y-1}y'-x(e^{y-1}y')'=0\Rightarrow y''(0)=2.$

现由 $z=f(\ln y-\sin x)\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)\Rightarrow \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(0)\times 0=0,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)^2+f'(\ln y-\sin x)(-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x).$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=f''(0)\times 0+f'(0)=1.$$

(21) （**本题满分 11 分**）

设函数 $f(x), f(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析与证明】 令$F(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow F(x)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，在题设条件下，要证存在$\xi\in(a,b), F''(\xi)=0.$ 已知$F(a)=F(b)=0,$ 只须由题设再证$\exists c\in(a,b), F(c)=0.$

（1） 由题设 $\exists x_1\in(a,b), M=\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(x_1), \exists x_2\in(a,b), M=\max\limits_{[a,b]} g(x)=g(x_2).$ 若 $x_1=x_2$，取

$c = x_1 = x_2, F(c) = 0.$

若 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则

$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0$，$F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0.$

$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2), F(c) = 0.$

（2）由 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, 对 $F(x)$ 分别在 $[a,c],[c,b]$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$ 使得

$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$

再对 $F'(x)$ 用罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$, 使得

$F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi).$

(22) **（本题满分 11 分）**

设二元函数

$$f(x,y)\begin{cases} x^2, & |x|+|y| \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x|+|y| \leq 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D = \left\{(x,y)\middle\| x| + |y| \leq 2\right\}$.

【分析与求解解】 D 如图（1）所示,它关于 x, y 轴对称,又 $f(x,y)$ 对 x, y 均为偶函数 $\Rightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 的第一象限部分.

由于被积函数分块表示，将 D_1 分成(如图(2)): $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$，且

$D_{11}: |x|+|y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0,$ $D_{12}: 1 \leq |x|+|y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$

于是 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_{11}} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_{12}} f(x,y)d\sigma.$ 而

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{12}.$$

$$\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma \xrightleftharpoons[\text{变换}]{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{r} r dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d(\tan\frac{\theta}{2})}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}}=\int_0^1\frac{2du}{1-u^2+2u}=\int_0^1\frac{2du}{2-(u-1)^2}$$

$$\xrightarrow[\longleftarrow]{令u-1=t}\int_0^1\frac{2dt}{2-t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}+t}+\frac{1}{\sqrt{2}-t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\Bigg|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$\Rightarrow$ $$\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma=\frac{1}{12}+\frac{2}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1),,$$

因此 $$\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma=4\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)\right),$$

(23) （**本题满分 11 分**）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共的解,求 a 的值及所有的公共解

【解】 将①与②联立，加减消元有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\1&2&a&\vdots&0\\1&4&a^2&\vdots&0\\1&2&1&\vdots&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\0&1&a-1&\vdots&0\\0&3&a^2-1&\vdots&0\\0&1&0&\vdots&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\0&1&a-1&\vdots&0\\0&0&(a-1)(a-2)&\vdots&0\\0&0&1-a&\vdots&a-1\end{bmatrix},$$

如果 $a=1$, 则 $\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&0\\0&1&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$. 从而方程组的通解为 $k(1,0,-1)^T$. 即是方程组①与②的公共解。

FREEKAOYAN

如果 $a=2,$ 则 $\overline{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$. 从而方程组的通解为 $(0,1,-1)^T$. 即是方程组①与②的公共解。

(24)（**本题满分 11 分**）

设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,a_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $B=A^5-4A^3+E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 验证 a_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值的特征向量;

(Ⅱ) 求矩阵 B.

【解】 （Ⅰ）由 $Aa=\lambda a$ 知 $A^n a=\lambda^n a$ 那么

$$Ba_1=(A^5-4A^3+E)a_1=A^5a_1-4A^3a_1+a_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)a_1=-2a_{1,}$$

所以 a_1 是矩阵 B 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量。

类似地，若 $Aa_2=\lambda_2 a_2, Aa_3=\lambda_3 a_3,$ 有

$Ba_2=(\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1)a_2=a_2, Ba_3=(\lambda_3^5-4\lambda_3^3+1)a_3=a_3,$

因此，矩阵 B 的特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=\mu_3=1.$

由 A 是对称矩阵知矩阵 B 也是对称矩阵，设矩阵 B 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量 $\beta=(x_1,x_2,x_3)^T$，那么

$$a_1^T\beta=x_1-x_2+x_3=0.$$

所以矩阵 B 属于特征值 $\mu=1$ 的线性无关的特征向量是 $\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(=1,0,1)^T$.

因而，矩阵 B 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量是 $k_1(1,-1,1)^T$. 其中 k_1 是不为 0 的任意常数。

矩阵 B 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $k_2(1,1,0)^T+k_3(-1,0,1)^T$, ，其中 k_2,k_3 是不全为 0 的任意常数。

（Ⅱ）由 $Ba_1=-2a_2, B\beta_2=\beta_2, B\beta_3=\beta_3$ 有

FREEKAOYAN

$B(a_1, a_2, a_3) = (-2a_1, \beta_2, \beta_3).$

那么 $B = (-2a_1, \beta_2, \beta_3)(a_1, a_2, a_3)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

FREEKAOYAN