2007 年考研数学一真题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分，在每小题给的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后括号内）

（1） 当 $x \to 0^{+}$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ D. $1-\cos\sqrt{x}$

(2) 曲线 y= $\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$, 渐近线的条数为 ( )

A.0 B.1 C.2 D.3

(3)如图，连续函数 y=f(x)在区间[-3，-2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[-2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 F(x)=$\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是 ( )

A. F(3)=$-\dfrac{3}{4}F(-2)$ B. F(3)=$\dfrac{5}{4}F(2)$ C. F(3)=$+\dfrac{3}{4}F(2)$ D. F(3)= $-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数 f（x）在 x=0 处连续，下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 f（0）=0 B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 f（0）=0

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f^{'}(0)$=0 D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f^{'}(0)$=0

(5)设函数 f（x）在（0, +∞）上具有二阶导数，且 $f''(x)>o$，令 u_n=f(n)=1,2,…..n, 则下列结论正确的是 ( )

A.若 $u_1>u_2$，则{u_n}必收敛 B. 若 $u_1>u_2$，则{u_n}必发散

C. 若 $u_1<u_2$，则{u_n}必收敛 D. 若 $u_1<u_2$，则{u_n}必发散

(6)设曲线 L：f(x, y) = 1 (f(x, y)具有一阶连续偏导数)，过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,T 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧，则下列小于零的是 ( )

A. $\int_r (x,y)dx$ B. $\int_r f(x,y)dy$ C. $\int_r f(x,y)ds$ D. $\int_r f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

（7）设向量组 α_1，α_2，α_3 线形无关，则下列向量组线形相关的是： ( )

（A） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ （B） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C） $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$ （D）$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

（8）设矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 于 B ( )

(A) 合同，且相似 (B) 合同，但不相似
(C) 不合同，但相似 (D)既不合同，也不相似

（9）某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p$\left(0<p<1\right)$，则此人第 4 次射击恰好第

2 次命中目标的概率为：　　　　　(　)

（A）$3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C)　$3p^2(1-p)^2$　　(D)　$6p^2(1-p)^2$

(10) 设随即变量（X，Y）服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X，Y 的概率密度，则在 Y＝y 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为　(　)

（A）$f_X(x)$　　(B)　$f_Y(y)$

(C)　$f_X(x)\ f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二．**填空题**：11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上

（11）　$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx =$______.

（12）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

(13)二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 y＝___________.

(14)设曲面 $\sum$ ：$|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} (x+|y|)ds =$____________.

(15)设矩阵 A＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为________.

（16）在区间（0，1）中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

三．**解答题**：17~24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)（本题满分11分）求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值。

(18)(本题满分10分)

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2xydzdx+3xydxdy,$$

其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧.

(19)(本题是11分)

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分10分)

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，其和函数$y(x)$满足

$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$

(1)证明$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$；

(2)求$y(x)$的表达式.

(21)(本题满分11分)

设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ (1)

与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求a的值及所有公共解.

(22)设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\ \alpha_1=(1,-1,1)^T$是 A 的属于$\lambda_1$的一个特征向量,

记$B=A^5-4A^3+E$其中E为 3 阶单位矩阵

(I) 验证α_1是矩阵B的特征向量,并求B的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵B.

(23)设二维变量(x,y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0<x<1,0<y<1\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

(I) 求$P\{X>2Y\}$;

(II) 求$z=X+Y$的概率密度.

(24)设总体X的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & 0<x<\theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta\le x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量；

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

2007 年考研数学一真题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分，在每小题给的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后括号内）

（2） 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 (B)

A. $1-e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ D. $1-\cos\sqrt{x}$

(2) 曲线 y= $\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$, 渐近线的条数为 (D)

A.0 B.1 C.2 D.3

(3)如图，连续函数 y=f(x)在区间[-3，-2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[-2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 F(x)=$\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是 (C)

A. F(3)=$-\frac{3}{4}F(-2)$ B. F(3)=$\frac{5}{4}F(2)$ C. F(3)=$+\frac{3}{4}F(2)$ D. F(3)= $-\frac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数 f（x）在 x=0 处连续，下列命题错误的是 (C)

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则 f（0）=0 B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 f（0）=0

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f^{'}(0)$=0 D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f^{'}(0)$=0

(5)设函数 f（x）在（0, +∞）上具有二阶导数，且 $f''(x)>o$，令 u_n=f(n)=1,2,…..n, 则下列结论正确的是(D)

A.若 $u_1>u_2$，则{ u_n }必收敛 B. 若 $u_1>u_2$，则{ u_n }必发散

C. 若 $u_1<u_2$，则{ u_n }必收敛 D. 若 $u_1<u_2$，则{ u_n }必发散

(6)设曲线 L：f(x, y) = 1 (f(x, y)具有一阶连续偏导数)，过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,T 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧，则下列小于零的是 (B)

A. $\int_r (x,y)dx$ B. $\int_r f(x,y)dy$ C. $\int_r f(x,y)ds$ D. $\int_r f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

（7）设向量组α_1，α_2，α_3线形无关，则下列向量组线形相关的是： (A)

（A） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ （B） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（C） $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$ （D）$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

（8）设矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 A 于 B， (B)

(A) 合同，且相似 (B) 合同，但不相似
(C) 不合同，但相似 (D)既不合同，也不相似

（9）某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p$\left(0<p<1\right)$，则此人第 4 次射击恰好第

2 次命中目标的概率为： (C)

（A）$3p(1-p)^2$ (B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

(10) 设随即变量（X，Y）服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X，Y 的概率密度，则在 Y＝y 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 (A)

（A）$f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)\ f_Y(y)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二．**填空题**：11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（11） $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

（12）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z = f(x^y, y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x^y, y^x) y x^{y-1} + y^x \ln y f_2'(x^y, y^x)$.

(13)二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 y= $C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$.

(14)设曲面 $\sum$ ：$|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} (x+|y|)ds = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(15)设矩阵 A＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 1 .

（16）在区间（0，1）中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\frac{3}{4}$.

三、**解答题**：17~24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17)（本题满分11分）求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$ 上的最大值和最小值。

【详解】:

(1)求驻点$\begin{cases} f_x = 2xy - 2xy^3 = 0 \\ f_y = 4xy - 2x^3 y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0,0)(f = 0)$

或$(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm 1)(f = 2)$;

(2) 考察边界$y = 0$，此时最大值为4，最小值为0

(3)考察边界$x^2 + y^2 = 4, y > 0$

$F(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

$\begin{cases} 2x - 2xy^2 - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2x^2 y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2}, y^2 = \frac{3}{2}, \lambda = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

此时数值为$\frac{7}{4}$

$x^2 = 0, y^2 = 4$，此时数值为8

$x^2 = 4, y^2 = 0$，此时数值为4

综上所述x＝0，y＝±2时，取得为8

最小值x＝0，y＝0取得为0

(18)(本题满分10分)

计算曲面积分

$I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2xydzdx + 3xydxdy,$

其中Σ为曲面$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}(0 \le z \le 1)$的上侧

【详解】

取$\sum_1$为xoy平面上被椭圆$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$所围部分的下侧，

记Ω为由$\sum$ 与$\sum_1$围成的空间闭区域，则

$$I = \iint_{\sum + \sum_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy - \iint_{\sum_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy$$

$Gauss$公式 $\iint_{\sum + \sum_1} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy = \iiint_{\Omega} (z + 3z)dxdydz$

$$= \iiint_{\Omega} 3zdxdydz = 3\int_0^1 dz \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 - z} zdxdy = \pi$$

而$\iint\limits_{\Sigma_1} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=-\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1} 3xydxdy=0, I=\pi.$

(19)(本题是11分)

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

【详解】

证明：设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内某点 $c\in(a,b)$ 同时取得最大值，则 $f(c)=g(c)$，此时的 c 就是所求点 η使得$f(\eta)=g(\eta)$.若两个函数取得最大值的点不同则有设

$f(c)=\max f(x), g(d)=\max g(x)$ 故有 $f(c)-g(c)>0, g(d)-f(d)<0$，由介值定理，在(c,d)内肯定存在η使得$f(\eta)=g(\eta)$由罗尔定理在区间$(a,\eta),(\eta,b)$内分别存在一点ξ_1,ξ_2,使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$在区间(ξ_1,ξ_2)内再用罗尔定理，即

存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

(20)(本题满分10分)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，其和函数$y(x)$满足

$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$

(1)证明$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\text{L}$；

(2)求$y(x)$的表达式

【详解】

(1) 将已知条件中幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$代入到微分方程中，整理即可得到：

$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\text{L}$；

(2) 解题如下

$y(0)=0 \Rightarrow a_0=0$

$y^{'}(0)=1 \Rightarrow a_1=1$

$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n \Rightarrow a_2=a_4=\cdots=a_{2n}=0$

$a_3=a_1=1$

$a_5=\dfrac{2}{4}a_3=\dfrac{1}{2}$

$a_7=\dfrac{2}{6}a_5=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$a_9=\dfrac{2}{8}a_7=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}$

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x+x^3+\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}x^7+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}x^9$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}+x=xe^{x^2}$$

(21)(本题满分11分)

设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ (1)

与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求a的值及所有公共解

【详解】:

因为方程组(1)、(2)有公共解，即由方程组(1)、(2)组成的方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}\quad (3) \text{ 的解.}$$

即距阵$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&a^2+3a+4&0\end{pmatrix}$方程组(3)有解的充要条件为

$a=1,a=2$.

当$a=1$时，方程组(3)等价于方程组(1)即此时的公共解为方程组(1)的解.解方程组(1)的基础解系为

$\xi=(1,0,-1)^T$ 此时的公共解为： $x=k\xi,k=1,2,\cdots$

当 $a=2$ 时，方程组(3)的系数距阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&2&0\\1&4&4&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 此时方程组(3)的解为

$x_1=0,x_2=1,x_3=-1$，即公共解为：$k(0,1,-1)^T$

(22)设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\ \alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,

记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量,并求 B 的全部特征值的特征向量;

(II) 求矩阵 B .

【详解】:

（Ⅰ）可以很容易验证 $A^n\alpha_1=\lambda_1{}^n\alpha_1(n=1,2,3...)$，于是

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=(\lambda_1{}^5-4\lambda_1{}^3+1)\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是 α_1 是矩阵 B 的特征向量.

B 的特征值可以由 A 的特征值以及 B 与 A 的关系得到，即

$\lambda(B)=\lambda(A)^5-4\lambda(A)^3+1$，

所以 B 的全部特征值为－2，1，1.

前面已经求得 α_1 为 B 的属于－2 的特征值，而 A 为实对称矩阵，

于是根据 B 与 A 的关系可以知道 B 也是实对称矩阵，于是属于不同的特征值的特征向量正交，设 B 的属于 1 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

于是求得 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha_2=(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$

（Ⅱ）令矩阵 $P=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}BP=diag(-2,1,1)$，所以

$$B = P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} diag(-2,1,1) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(23)设二维变量(x,y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-x-y & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X>2Y\}$；

(II) 求 $z = X+Y$ 的概率密度.

【详解】:

（Ⅰ） $P\left\{X>2Y\right\} = \iint\limits_D (2-x-y)dxdy$，其中 D 为$0<x<1, 0<y<1$中$x>2y$的那部分区域；

求此二重积分可得 $P\left\{X>2Y\right\} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (2-x-y)dy$

$$= \int_0^1 (x - \frac{5}{8}x^2)dx$$

$$= \frac{7}{24}$$

（Ⅱ） $F_Z(z) = P\left\{Z \le z\right\} = P\left\{X+Y \le z\right\}$

当$z \le 0$时， $F_Z(z) = 0$；

当$z \ge 2$时， $F_Z(z) = 1$；

当$0<z<1$时， $F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} (2-x-y)dy = -\frac{1}{3}z^3 + z^2$

当$1<z<2$时， $F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (2-x-y)dy = \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 4z - \frac{5}{3}$

于是 $f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, 0<z<1\\ z^2-4z+4, 1<z<2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

(24)设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta\le x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值

(I) 求参数 θ 的矩估计量；

(II) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

【详解】:

（Ⅰ）记 $EX=\mu$，则

$$\mu=EX=\int_0^\theta \frac{x}{2\theta}dx+\int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta,$$

解出 $\theta=2\mu-\frac{1}{2}$，因此参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）只须验证 $E(4\overline{X}^2)$ 是否为 θ^2 即可，而

$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4(D\overline{X}+(E\overline{X})^2)=4(\frac{1}{n}DX+(EX)^2)$，而

$EX=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$，$EX^2=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2)$，

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{48}-\frac{\theta}{12}+\frac{1}{12}\theta^2$，

于是 $E(4\overline{X}^2)=\frac{5+3n}{12n}+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+1}{3n}\theta^2\ne\theta^2$

因此 $4\overline{X}^2$ 不是为 θ^2 的无偏估计量.