

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 设 $0 < a < b$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}}$ ()

- (A) a . (B) a^{-1} . (C) b . (D) b^{-1} .

【答案】(B)

【详解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^{-n} \left(1 + \frac{b^{-n}}{a^{-n}} \right) \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1} \left[\left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的 ()

- (A) 跳跃间断点. (B) 可去间断点. (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

【答案】(B)

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点

(3) 设 $f(x)$ 是连续奇函数， $g(x)$ 是连续偶函数，区域

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ 则正确的 ()

- (A) $\iint_D f(y)g(x) dx dy = 0$. (B) $\iint_D f(x)g(y) dx dy$.
(C) $\iint_D [f(x) + g(y)] dx dy = 0$. (D) $\iint_D [f(y) + g(x)] dx dy = 0$.

【答案】(A)

【详解】(A) 中区域 D 关于 x 轴对称， $f(y)$ 是奇函数，被积函数 $f(y)g(x)$ 对 y 为奇函数，

所以 $\iint_D f(y)g(x) dx dy = 0$

(4) 曲线方程为 $y = f(x)$ 函数在区间 $[0, a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ ()

- (A) 曲边梯形 $ABCD$ 面积. (B) 梯形 $ABCD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.(D) 三角形 ACD 面积.

【答案】 C

$$\text{【详解】 } \int_0^a xf'(x)dx = \int_0^a xdf(x) = af(a) - \int_0^a f(x)dx$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积, $\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形的面积

所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积。

(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则 ()

(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆.(B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆.(D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

【答案】 (C)

$$\text{【详解】 } (E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E, (E + A)(E - A + A^2) = E + A^3 = E,$$

故 $E - A, E + A$ 均可逆。

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ()

$$(A) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (B) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (C) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (D) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

【答案】 选(D)

$$\text{【详解】 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ 。记 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, 正、负惯性指数相同, 故选(D)

(7) 随机变量 X, Y 独立同分布且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()

(A) $F^2(x)$.(B) $F(x)F(y)$.

$$(C) 1 - [1 - F(x)]^2. \quad (D) [1 - F(x)][1 - F(y)].$$

【答案】(A)

【详解】 $F(Z) = P(Z \leq z) = P\{\max\{X, Y\} \leq z\}$

$$= P(X \leq z)P(Y \leq z) = F(z)F(z) = F^2(z)$$

(8) 随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$ 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()

$$(A) P\{Y = -2X - 1\} = 1. \quad (B) P\{Y = 2X - 1\} = 1.$$

$$(C) P\{Y = -2X + 1\} = 1. \quad (D) P\{Y = 2X + 1\} = 1.$$

【答案】选(D)

【详解】用排除法

设 $Y = aX + b$, 由 $\rho_{XY} = 1$, 知道 X, Y 正相关, 得 $a > 0$, 排除(A)、(C)

由 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 得 $EX = 0, EY = 1$, $E(Y) = E(aX + b) = aEX + b$

$$1 = a \times 0 + b, \quad b = 1 \text{ 排除(B)}$$

故选择(D)

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c = \underline{\quad}$.

【答案】1

【详解】由 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \Rightarrow c^2 + 1 = \frac{2}{c} \Rightarrow c = 1$

(10) 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 上对应 $x = 0$ 处切线方程为 $\underline{\quad}$.

【答案】 $y = 2x$

【详解】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 且 $f(x)$ 连续, 则 $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, 所

以切线方程为: $y = 2x$.

(11) $\int_1^2 dx \int_0^1 x^y \ln x dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【详解】 $\int_1^2 dx \int_0^1 x^y \ln x dy = \int_1^2 \ln x dx \int_0^1 x^y dy = \int_1^2 dx \int_0^1 dx^y = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$

(12) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 通解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $y = -xe^{-x} + Cx$

【详解】 $y' - \frac{y}{x} = xe^{-x}, \quad P = -\frac{1}{x}, \quad Q = xe^{-x}$

$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int xe^{-x} e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C \right) = x \left(\int e^{-x} dx + C \right) = -xe^{-x} + Cx.$

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同, 若行列式 $|A| = 0$, 则 A 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2

【详解】 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 则存在可逆矩阵 P , 使得

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = B$, 故 $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$, 由 $|A| = 0$,

$|A| = |P| \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{vmatrix} |P^{-1}| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$

又 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有且只有一个为零, 故 $r(A) = r(B) = 2$

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}e^{-1}$

【详解】 因为 $DX = EX^2 - (EX)^2$, 所以 $EX^2 = 2$, X 服从参数为 1 的泊松分布,

所以 $P\{X = 2\} = \frac{1}{2}e^{-1}$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

(16) (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \int_0^1 |t(t-x)| dt$, $0 < x < 1$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间和凹凸区间.

【详解】 $f(x) = \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt = \int_0^x (tx - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - tx) dt$

$$= \left(x \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x + \left(\frac{t^3}{3} - x \cdot \frac{t^2}{2} \right) \Big|_x^1 = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} \right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} \right)$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}.$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 因为 } 0 < x < 1, \text{ 所以 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f'(x) > 0, \text{ 得 } \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$$

$$f'(x) < 0, \text{ 得 } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此, $f(x)$ 的单调增区间是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$; 单调减区间是 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}$ 为

极小值.

由 $f''(x) = 2x$, 可知 $(0, 1)$ 为凹区间.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

【详解】设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 4)$

$$\text{得方程组} \begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{得 } U_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8 = 12, \quad U_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

(18) (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$ 时,

求(1) dz

$$(2) \text{ 记 } u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right), \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}.$$

【详解】(1) $2xdx + 2ydy - dz = \varphi'(x + y + z) \cdot (dx + dy + dz),$

$$(\varphi' + 1)dz = (-\varphi' + 2x)dx + (-\varphi' + 2y)dy$$

$$dz = \frac{(-\varphi' + 2x)dx + (-\varphi' + 2y)dy}{\varphi' + 1} (\because \varphi' \neq -1)$$

(2)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} - \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x-y} \cdot \frac{-2y + 2x}{\varphi' + 1} = \frac{2}{\varphi' + 1} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-2\varphi''(1 + \frac{\partial z}{\partial x})}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi''(1 + \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'})}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi''(1 + \varphi' + 2x - \varphi')}{(\varphi' + 1)^3} = -\frac{2\varphi''(1 + 2x)}{(\varphi' + 1)^3} \end{aligned}$$

(19) (本题满分 10 分)

$f(x)$ 是周期为 2 的连续函数,

$$(1) \text{ 证明对任意实数都有 } \int_t^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$$

$$(2) \text{ 证明 } g(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt \text{ 是周期为 2 的周期函数.}$$

【详解】(1) 对于 $\int_2^{t+2} f(x)dx$, 令 $x = 2 + u$, 则 $\int_2^{t+2} f(x)dx = \int_0^t f(2+u)du$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 的周期为 2, 所以 } \int_2^{t+2} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$$

$$\text{所以 } \int_t^{t+2} f(x)dx = \int_t^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$$

$$(2) g(x+2) = \int_0^{x+2} \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x+2} 2f(t)dt - \int_0^{x+2} \left[\int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt \\
&= \int_0^x 2f(t)dt + \int_x^{x+2} 2f(t)dt - \int_0^x \left[\int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt - \int_0^2 \left[\int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt \\
&= \int_0^x 2f(t)dt + 2 \int_0^2 f(t)dt - \int_0^x \left[\int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt - 2 \int_0^2 f(t)dt \\
&= \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds \right] dt = g(x)
\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}$, 现矩阵 A 满足方程 $AX = B$, 其中 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$,

$$B = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

(1) 求证 $|A| = (n+1)a^n$

(2) a 为何值, 方程组有唯一解

(3) a 为何值, 方程组有无穷多解

【详解】①

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n
\end{aligned}$$

② 方程组有唯一解

由 $Ax = B$, 知 $|A| \neq 0$, 又 $|A| = (n+1)a^n$, 故 $a \neq 0$.

记 $A = A_{n \times n}$ ，由克莱姆法则知，

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}} = \frac{|A_{(n-1) \times (n-1)}|}{|A_{n \times n}|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

③ 方程组有无穷多解

由 $|A|=0$ ，有 $a=0$ ，则 $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & 1 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$ ，故 $r(A|B) = r(A) = n-1$

$Ax=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}$ ，则基础解系为 $k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$ ， k 为任意常数。

$$\text{又} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{故可取特解为 } \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } Ax = B \text{ 的通解为 } k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 特征向量, 向量 α_3 满足

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3,$$

证明 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

【详解】(1) 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表出, 不妨设 $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$,

其中 l_1, l_2 不全为零 (若 l_1, l_2 同时为 0, 则 α_3 为 0, 由 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 可知 $\alpha_2 = 0$)

$$\therefore A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\therefore A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\text{又 } A\alpha_3 = A(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\therefore -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 整理得: } 2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

则 α_1, α_2 线性相关, 矛盾 (因为 α_1, α_2 分别属于不同特征值得特征向量, 故 α_1, α_2 线性无关).

故: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 P 可逆, $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$

$$= (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{即: } AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3} (i=-1, 0, 1)$, Y 概率密度

$$\text{为 } f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \text{ 记 } Z = X + Y$$

$$(1) \text{ 求 } P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$$

(2) 求 Z 的概率密度

【详解】1.

$$F(z) = \frac{1}{3} \left[1 + \int_0^z 1 dy + 0 \right] = \frac{1}{3} (z+1)$$

$$P(z \leq \frac{1}{2} \mid X=0) = P(X+Y \leq \frac{1}{2} \mid X=0) = P(Y \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dy = \frac{1}{2}$$

2. 当 $z \geq 2$ 时, $F(z) = 1$

当 $z < -1$ 时, $F(z) = 0$

当 $-1 \leq z < 2$ 时,

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z)$$

$$= P(X+Y \leq z \mid X=-1) \cdot P(X=-1) + P(X+Y \leq z \mid X=0) \cdot P(X=0) + P(X+Y \leq z \mid X=1) \cdot P(X=1)$$

$$= \frac{1}{3} [P(Y \leq z+1) + P(Y \leq z) + P(Y \leq z-1)]$$

$$\text{当 } -1 \leq z < 0 \text{ 时, } F(z) = \frac{1}{3} \int_0^{z+1} 1 dy = \frac{1}{3} (z+1)$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F(z) = \frac{1}{3} \left[1 + \int_0^z 1 dy + 0 \right] = \frac{1}{3} (z+1)$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F(z) = \frac{1}{3} \left[1 + 1 + \int_0^{z-1} 1 dy \right] = \frac{1}{3} (z+1)$$

$$\text{所以 } F(z) = \begin{cases} 0 & z < -1 \\ \frac{1}{3}(z+1) & -1 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}, \text{ 则 } f(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(23) (本题满分 11 分)

设某企业生产线上产品合格率为0.96, 不合格产品中只有 $\frac{3}{4}$ 产品可进行再加工且再加工的合格率为0.8, 其余均为废品, 每件合格品获利80元, 每件废品亏损20元, 为保证该企业每天平均利润不低于2万元, 问企业每天至少生产多少产品? .

【详解】设每天至少生产 x 件产品。

则合格产品为 $0.96x + (1 - 0.96)x \cdot \frac{3}{4} \cdot 0.8 = 0.984x$

废品为 $x - 0.984x = 0.016x$

由题意知 $80 \times 0.984x - 20 \times 0.016x \geq 20000$

$\Rightarrow x \geq 255.10$

因为 x 为整数

所以 $x = 256$

FREEKAOYAN