2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的（　　）

(A) 跳跃间断点.　　　　(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.　　　　(D) 振荡间断点.

【答案】 B

【详解】 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点。

（2）设 f 连续，$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=u^2$，$u>1$，则 $F(u,v)=\iint\limits_D\dfrac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv$，

则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$（　　）

(A) $vf(u^2)$　　　　(B) $vf(u)$

(C) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　　　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

【答案】 选 A

【详解】 用极坐标得 $F(u,v)=\iint\limits_D\dfrac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$

$\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$

（3）设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则函数在原点偏导数存在的情况是(　)

(A) $f'_x(0,0)$存在，$f'_y(0,0)$存在　　　(B) $f'_x(0,0)$存在，$f'_y(0,0)$不存在

(C) $f'_x(0,0)$不存在，$f'_y(0,0)$存在　　(D) $f'_x(0,0)$不存在 $f'_y(0,0)$不存在

【答案】 C

【详解】 $f_x{}'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}$　$\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^x-1}{x-0}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{e^{-x}-1}{x-0}=-1$

故 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{e^{-x}-1}{x-0}$，所以偏导数不存在。

$$f_y{}'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{0^2+y^4}}-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2}-1}{y-0}=0$$

所以偏导数存在。故选 C

（4）曲线段方程为 $y=f(x)$ 函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$（　　）

(A) 曲边梯形 $ABCD$ 面积.　　(B) 梯形 $ABCD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.　　(D) 三角形 ACD 面积.

【答案】 (C)

【详解】 $\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=af(a)-\int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积。

（5）设 A 为 n 阶非 0 矩阵 E 为 n 阶单位矩阵若 $A^3=0$，则（　　）

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

【答案】 (C)

【详解】 $(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆。

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ 则在实数域上与 A 合同矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　$(B)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　$(D)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

【答案】(D)

【详解】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则$\lambda_1=-1,\lambda_2=3$。记$D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

则$\lambda_1=-1,\lambda_2=3$

正、负惯性指数相同，故选(D)

（7）随机变量X,Y独立同分布且X分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$分布函数为（　）

(A) $F^2(x)$.　　　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

【答案】(A)

【详解】

$F(Z)=P(Z\le z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P(X\le z)P(Y\le z)=F(z)F(z)=F^2(z)$

（8）随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$且相关系数$\rho_{XY}=1$，则（　）

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

【答案】选(D)

【详解】 用排除法

设$Y=aX+b$，由$\rho_{XY}=1$，知道X,Y正相关，得$a>0$，排除(A)、(C)

由$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，得

$$EX=0,EY=1,E(Y)=E(aX+b)=aEX+b$$

$$1=a\times0+b,\quad b=1$$

排除(B)

故选择(D)

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$______.

【答案】1

【详解】由 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)\Rightarrow c^2+1=\dfrac{2}{c}\Rightarrow c=1$

（10）函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，求积分 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)dx=$______.

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 3$

【详解】$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x}+x}{\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^2-2}$

所以 $f(t)=\dfrac{t}{t^2-2}$

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)dx=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2\right)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 3$$

（11）$\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$_________.其中 $D: x^2+y^2\le 1$

【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【详解】

$$\iint\limits_D (x^2-y)dxdy \underline{\underline{\text{利用函数奇偶性}}} \iint\limits_D x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{\pi}{4}$$

（12）微分方程 $xy'+y=0, y(1)=1,$ 求方程的特解 $y=$ _________.

【答案】$y=\dfrac{1}{x}$

【详解】由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y}{x},\dfrac{dy}{-y}=\dfrac{dx}{x},-\ln|y|=\ln|x|+C_1$ 所以 $\dfrac{1}{|y|}=|x|+C$，又 $y(1)=1$，所以 $y=\dfrac{1}{x}$.

（13）设 3 阶矩阵 A 的特征值 1，2，2，$\left|4A^{-1}-E\right|=$ _________.

【答案】A 的特征值为 1，2，2，则存在可逆矩阵 P，使得

【详解】$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=B, A=PBP^{-1}, A^{-1}=PB^{-1}P^{-1}$，

$$\left|4A^{-1}-E\right|=\left|4PB^{-1}P^{-1}-E\right|=\left|4PB^{-1}P^{-1}-PEP^{-1}\right|=\left|P\right|\left|4B^{-1}-E\right|\left|P^{-1}\right|=\left|4B^{-1}-E\right|$$

因

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $\left|4B^{-1}-E\right|=\begin{vmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{vmatrix}=3$

（14）设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$ ________.

【答案】$\frac{1}{2}e^{-1}$

【详解】因为 $DX=EX^2-(EX)^2$，所以 $EX^2=2$，X 服从参数为 1 的泊松分布，

所以 $P\left\{X=2\right\}=\frac{1}{2}e^{-1}$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

(16) （本题满分 10 分）

设 $z=z\,(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 所确定的函数，其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$ 时，求

(1) dz

（2）记 $u\left(x,y\right)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

【详解】①

$$2xdx+2ydy-dz=\varphi'\left(x+y+z\right)\cdot\left(dx+dy+dz\right)$$

$$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)$$

$$(\varphi'+1)dz=(-\varphi'+2x)dx+(-\varphi'+2y)dy$$

$$dz=\frac{(-\varphi'+2x)dx+(-\varphi'+2y)dy}{\varphi'+1}\ (\because \varphi'\neq -1)$$

②

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})\\&=\frac{1}{x-y}(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1})\\&=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{-2y+2x}{\varphi'+1}=\frac{2}{\varphi'+1}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''(1+\frac{\partial z}{\partial x})}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''(1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'})}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''(1+\varphi'+2x-\varphi')}{(\varphi'+1)^3}=-\frac{2\varphi''(1+2x)}{(\varphi'+1)^3}$$

(17) （本题满分 10 分）

$f(x)$是周期为 2 的连续函数，

（1）证明对任意实数 t 都有$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

（2）证明$g(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$是周期为 2 的周期函数.

【详解】（1）对于$\int_2^{t+2}f(x)dx$，令$x=2+u$，则$\int_2^{t+2}f(x)dx=\int_0^t f(2+u)du$

因为$f(x)$的周期为 2，所以$\int_2^{t+2}f(x)dx=\int_0^t f(x)dx$

所以$\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_t^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

（2）$g(x+2)=\int_0^{x+2}\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$

$$=\int_0^{x+2}2f(t)dt-\int_0^{x+2}\left[\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$=\int_0^x 2f(t)dt+\int_x^{x+2}2f(t)dt-\int_0^x\left[\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt-\int_0^2\left[\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$$

$$=\int_0^x 2f(t)dt+2\int_0^2 f(t)dt-\int_0^x\left[\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt-2\int_0^2 f(t)dt$$

$$=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt=g(x)$$

所以$g(x)$是周期为 2 的周期函数.

(18) （本题满分 10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D \max(xy,1)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

【详解】 $\iint\limits_D \max\left(xy,1\right)dxdy$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2 1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}}1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy=1+2\ln 2+\frac{15}{4}-\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2$$

(19) （本题满分 10 分）

已知年复利为 0.05，现存 a 万元，第一年取出 19 万元，第二年取出 28 万元，…第 n 年取出 10+9n 万元，问 a 至少为多少时，可以一直取下去？

【详解】由题得

$$a\ge 19e^{-0.05}+28e^{-0.05\times 2}+\cdots+(10+9n)e^{-0.05n}+\cdots$$
$$=10\sum_{n=1}^{\infty}e^{-0.05n}+\sum_{n=1}^{\infty}9ne^{-0.05n}$$
$$=10\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}}+\sum_{n=1}^{\infty}9ne^{-0.05n}$$

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}9ne^{-0.05nx}$

两边求积分

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}9n\int_0^x e^{-0.05nt}dt=\sum_{n=1}^{\infty}9n(\frac{1}{-0.05n}e^{-0.05nx}-\frac{1}{-0.05n})$$
$$=180\sum_{n=1}^{\infty}e^{-0.05nx}+180$$

由 $x>0$，$\int_0^x f(x)dx=180(1-\frac{e^{-0.05x}}{1-e^{-0.05x}})$

对上式两边求导 $f(x)=180\frac{0.05e^{-0.05x}}{(1-e^{-0.05x})^2}=\frac{9e^{-0.05x}}{(1-e^{-0.05x})^2}$

令 $x=1$，则 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}9ne^{-0.05n}=f(1)=\frac{9e^{-0.05}}{(1-e^{-0.05})^2}$

$$\therefore a\ge\frac{10e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}}+\frac{9e^{-0.05}}{(1-e^{-0.05})^2}=\frac{19e^{-0.05}-10e^{-0.1}}{(1-e^{-0.05})^2}=3794.29$$

所以 a 至少应为 3795.

(20) （本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，现矩阵 A 满足方程 $AX=B$，其中 $X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，

$B=\left(1,0,\cdots,0\right)$，

（1）求证 $|A|=\left(n+1\right)a^n$

（2）a 为何值，方程组有唯一解，求 x_1

（3）a 为何值，方程组有无穷多解，求通解

【详解】①

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\cdot\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

②方程组有唯一解

由 $Ax=B$，知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$。

记 $A=A_{n\times n}$，由克莱姆法则知，

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}}=\frac{|A_{(n-1)\times(n-1)}|}{|A_{n\times n}|}=\frac{\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}}{\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

③方程组有无穷多解

由$|A|=0$，有$a=0$，则

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccccc|c}0 & 1 & & & & 1 \\ & 0 & 1 & & & 0 \\ & & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & \vdots \\ & & & & 0 & 0\end{array}\right)$$

故$r(A\mid B)=r(A)=n-1$

$Ax=0$的同解方程组为$\begin{cases}x_2=0 \\ x_3=0 \\ \cdots \\ x_n=0\end{cases}$，则基础解系为$k(1,0,0,\ldots,0)^T$，$k$为任意常数。

又$\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$，故可取特解为$\eta=\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

所以$Ax=B$的通解为$k\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$,$k$为任意常数。

（21）（本题满分 11 分）

设 A 为 3 阶矩阵，a_1,a_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，向量 a_3 满足 $Aa_3=a_2+a_3$，

证明（1）a_1,a_2,a_3 线性无关；

（2）令 $P=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，求 $P^{-1}AP$.

【详解】（1）假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 l_1,l_2 不全为零（若 l_1,l_2 同时为 0，则 α_3 为 0，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 可知 $\alpha_2=0$）

$\because A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$

$\therefore A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

又 $A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$\therefore -l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$

则 α_1,α_2 线性相关，矛盾（因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关）.

故：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

（2）记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 则 P 可逆，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$

$$=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即：$AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\frac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

（1）求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$

（2）求 Z 的概率密度.

【详解】1.

$F(z)=\frac{1}{3}\left[1+\int_0^z 1dy+0\right]=\frac{1}{3}(z+1)$

$P(z\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(X+Y\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}1dy=\frac{1}{2}$

2. 当$z\ge 2$时，$F(z)=1$

当$z<-1$时，$F(z)=0$

当$-1\le z<2$时，

$F(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$=P(X+Y\le z\big|X=-1)\cdot P(X=-1)+P(X+Y\le z\big|X=0)\cdot P(X=0)+P(X+Y\le z\big|X=1)\cdot P(X=1)$

$=\frac{1}{3}\left[P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1)\right]$

当$-1\le z<0$时，$F(z)=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1dy=\frac{1}{3}(z+1)$

当$0\le z<1$时，$F(z)=\frac{1}{3}\left[1+\int_0^z 1dy+0\right]=\frac{1}{3}(z+1)$

当$1\le z<2$时，$F(z)=\frac{1}{3}\left[1+1+\int_0^{z-1}1dy\right]=\frac{1}{3}(z+1)$

所以 $F(z)=\begin{cases}0 & z<-1\\ \frac{1}{3}(z+1) & -1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$，则 $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{3},\ -1\le z<2\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

(23)（本题满分 11 分）

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体为$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本.记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

（1）证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

（2）当 $\mu=0,\sigma=1$时，求DT.

【详解】(1) $E(T)=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E\overline{X}^2-E(\frac{1}{n}S^2)=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}\sigma^2$

因为：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$,而 $E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2$

$E(T)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$,所以 T 是 μ^2 的无偏估计

(2) $D(T)=ET^2-(ET)^2, E(T)=0$, $ET^2=E(\overline{X}^4-\frac{2}{n}\overline{X}^2\cdot S^2+\frac{S^4}{n^2})$

因为 $\overline{X}$ □ $N(0,\frac{1}{n})$ $\frac{\overline{X}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ □ $N(0,1$

令 $X=\frac{\overline{X}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ $E(X)^4=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3EX^2=3$

所以 $E\overline{X}^4=\frac{3}{n^2}$

$$E(\frac{2}{n}\overline{X}^2\cdot S^2)=\frac{2}{n}E\overline{X}^2\cdot ES^2=\frac{2}{n}(D\overline{X}+(E\overline{X})^2)$$
$$=\frac{2}{n}(\frac{1}{n}+0)=\frac{2}{n^2}$$

$$E(\frac{S^4}{n^2})=\frac{1}{n^2}ES^4$$

$$ES^4=DS^2+(ES^2)^2=DS^2+1$$

因为 $W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ □ $\chi^2(n-1)$ 且 $\sigma^2=1$

$$DW=(n-1)^2DS^2=2(n-1)$$

$$DS^2=\frac{2}{(n-1)}, ES^4=\frac{2}{(n-1)}+1=\frac{n+1}{n-1}$$

所以 $ET^2=\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$