

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 设 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$ ，求 $f'(x)$ 的零点个数 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】(D)

【详解】 $f'(x) = 2x(x-1)(x-2) + x^2(x-1) + x^2(x-2) = x(4x^2 - 9x + 4)$

令 $f'(x) = 0$ ，则可得 $f'(x)$ 零点的个数为 3.

(2) 曲线方程为 $y = f(x)$ 函数在区间 $[0, a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ ()

- (A) 曲边梯形 $ABCD$ 面积. (B) 梯形 $ABCD$ 面积.
(C) 曲边三角形 ACD 面积. (D) 三角形 ACD 面积.

【答案】(C)

【详解】 $\int_0^a xf'(x) dx = \int_0^a x df(x) = df(x) \int_0^a (f(x)) dx$ ，其中 $af(a)$ 是矩形面积， $\int_0^a f(x) dx$ 为曲边梯形的面积，所以 $\int_0^a xf'(x) dx$ 为曲边三角形的面积。

(3) 在下列微分方程中，以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ()

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

【答案】(D).

【详解】由 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ 可知其特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$.

故对应的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$ ，即 $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

所以所求微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ ，选(D).

(4) 判断函数 $f(x) = \frac{\ln x}{|x-1|} \sin x (x > 0)$ 间断点的情况()

(A) 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

(D) 有两个跳跃间断点

【答案】(A)

【详解】 $f(x)$ 的间断点为 $x=1, 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 故 $x=0$ 是可去间断点;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sin 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\sin 1$, 故 $x=1$ 是跳跃间断点

故选(A)。

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是()

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】(B)

【详解】若 $\{x_n\}$ 单调, 则由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界知, $\{f(x_n)\}$ 单调有界,

因此 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故选(B).

(6) 设 f 连续, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = u^2$, $u > 1$, 则 $F(u, v) = \iint_D \frac{f(u^2 + v^2)}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv$,

则 $\frac{\partial F}{\partial u} = ()$

(A) $vf(u^2)$ (B) $vf(u)$

(C) $\frac{v}{u} f(u^2)$ (D) $\frac{v}{u} f(u)$

【答案】选 A

【详解】用极坐标得 $F(u, v) = \iint_D \frac{f(u^2 + v^2)}{\sqrt{u^2 + v^2}} du dv = \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = 0$, 则 ()

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
 (C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

【答案】(C)

【详解】 $(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E$, $(E + A)(E - A + A^2) = E + A^3 = E$

故 $E - A, E + A$ 均可逆.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ()

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
 (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

【答案】(D)

【详解】 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 记 $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{x^2 f(x)} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = 1$, 由 $f(x)$ 连续, 则 $f(0) = \frac{1}{2}$

(10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 _____.

【答案】 $y = x + 1$.

【详解】 设 $F(x, y) = \sin(xy) + \ln(y-x) - x$, 斜率 $k = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y \cos(xy) + \frac{-1}{y-x} - 1}{x \cos(xy) + \frac{1}{y-x}}$, 在

$(0,1)$ 处, $k = 1$, 所以切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$

(11) 求函数 $f(x) = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点 _____.

【答案】 $x = 0$

【详解】 $f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-5) \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} (x-2) x^{-\frac{1}{3}}$,

令 $f''(x) = \frac{10}{9} x^{-\frac{4}{3}} (x+1) = 0$, 得 $x = -1$, 而 $x = -1$ 时, $f'(x)$ 左右两边不变号, 故不是拐

点, $x = 0$ 时, 二阶导数不存在且 $f'(x)$ 左右两边正负号改变, 故 $x = 0$ 是拐点.

(12) 已知 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^y$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2} (\ln 2 - 1)$

【详解】 令 $u = \frac{y}{x}, v = \frac{x}{y}$, 从而 $z = u^v$, 对方程两边去对数得 $\ln z = v \ln u$, 对改方程两边

对 x 求导, 所以 $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = v'_x \ln u + \frac{v}{u} u'_x = \frac{1}{y} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{y}$,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = z \left(\frac{1}{y} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{y} \right) \bigg|_{(1,2)} = \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{y} \right) \bigg|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\ln 2 - 1)$$

(13) 矩阵 A 的特征值是 $\lambda, 2, 3$, 其中 λ 未知, 且 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.

【答案】 $\lambda = -1$

【详解】 由矩阵特征值与矩阵行列式之间的关系得, $2 \cdot 3 \cdot \lambda = -6$, 故 $\lambda = -1$

(14) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 _____.

【答案】 1

【详解】 $A(\alpha_1, \alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (0, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2)$, P 可逆, 故 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

A 与 B 有相同的特征值 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)$, $\lambda_{1,2} = 0, 1$, 故非零的特征值为 1.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin \sin x) \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos(\sin x))}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cdot \cos x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求积分 } \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{【详解】 分析: 令 } x = \sin t, \text{ 则 } \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot t}{\cos t} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2t dt = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16}$$

(18) (本题满分 10 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

【详解】 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(x + y + z - 4)$

$$\text{得方程组} \begin{cases} F_x(x, y, z) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 0 \\ F_z(x, y, z) = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

得 $U_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8 = 12$.

$U_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

(19) (本题满分 10 分)

曲线 $y = f(x)$ 满足 $f(0) = 1$ 对于任意的 t 曲线是严格递增, 在 x 轴上 $t > 0$, 该曲线与直线 $x = 0, x = t(t > 0)$ 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$. 如果 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\frac{S(t)}{V(t)} = 2$, 求曲线 $y = f(x)$.

【详解】 旋转体体积 $V(t) = \pi \int_0^t y^2 dx$

旋转体的侧面积 $S(t) = \int_0^t 2\pi |x| \sqrt{1 + y'^2} dx$

由 $2\pi \int_0^t |y| \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_0^t y^2 dx$

两边求导, 得 $|y| \sqrt{1 + y'^2} = y^2$

$$y^2(1 + y'^2) = y^4$$

从而 $2y'y'' = 2yy'$, 得 $y'' = y$.

所以特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 特征根为 $\lambda = \pm 1$.

则通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

由 $1 + y'^2 = y^2$, 得 $4C_1 C_2 = 1$.

所以 $y = C_1 e^x + \frac{1}{4C_1} e^{-x}$ 由 $f(0) = 1, C_1 = \frac{1}{2}$.

故该曲线方程为 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(20) (本题满分 11 分)

求二重积分 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

【详解】

$$\iint_D \max(xy, 1) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy = 1 + 2 \ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2$$

(21) (本题满分 11 分)

证明(1)积分中值定理:

(2)已知 $\varphi(x)$ 在 $[1, 3]$ 上连续且可导, $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$ 证明至少存在一点

$\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$.

【详解】证明: (1) 定积分中值定理: 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$

上至少存在一个点 ξ , 使下式成立: $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) (a \leq \xi \leq b)$

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

不等式各除以 $b-a$, 得 $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

这表明, 确定的数 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 介于函数 $f(x)$ 的最小值 m 及最大值 M 之间.

根据闭区间上连续函数的介值定理, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得函数 $f(x)$ 在点 ξ 处的

值与这个确定的数值相等, 即应有 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b)$

两端各乘以 $b-a$, 即得所要证的等式.

(2) 证明: 由积分中值定理, 则至少存在一点 $c \in (2, 3)$, 使得 $\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(c)$, 由题得

$$\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \varphi(c)$$

若 $\varphi(1) = \varphi(c)$ ，则由罗尔定理存在点 $\xi \in (1, c) \subset (1, 3)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ ；

若 $\varphi(1) \neq \varphi(c)$ ，不妨设 $\varphi(1) > \varphi(c)$ ，由 $\varphi(x)$ 连续与介值定理存在点 η ，使 $\varphi(\eta) = \varphi(0)$ ，

在区间 $[1, \eta]$ 上应用罗尔定理，存在点 $\xi \in (1, \eta) \subset (1, 3)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ ；

若 $\varphi(1) < \varphi(c)$ ，同理可得存在点 $\xi \in (1, 3)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ 。

证毕

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}$ ，现矩阵 A 满足方程 $AX = B$ ，其中 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ，

$$B = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

(1) 求证 $|A| = (n+1)a^n$

(2) a 为何值，方程组有唯一解，求 x_1

(3) a 为何值，方程组有无穷多解，求通解

【详解】①

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n$$

② 方程组有唯一解

由 $Ax = B$ ，知 $|A| \neq 0$ ，又 $|A| = (n+1)a^n$ ，故 $a \neq 0$ 。

记 $A = A_{n \times n}$ ，由克莱姆法则知，

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}} = \frac{|A_{(n-1) \times (n-1)}|}{|A_{n \times n}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}}{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

③方程组有无穷多解

由 $|A|=0$ ，有 $a=0$ ，则

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & 1 \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

故 $r(A|B) = r(A) = n-1$

$$Ax=0 \text{ 的同解方程组为 } \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases}, \text{ 则基础解系为 } k(1, 0, 0, \dots, 0)^T, \text{ } k \text{ 为任意常数.}$$

又

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & 1 \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{故可取特解为 } \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } Ax = B \text{ 的通解为 } k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, k \text{ 为任意常数。}$$

(23) (本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶矩阵, a_1, a_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 特征向量, 向量 a_3 满足 $Aa_3 = a_2 + a_3$,

证明 (1) a_1, a_2, a_3 线性无关;

(2) 令 $P = (a_1, a_2, a_3)$, 求 $P^{-1}AP$

【详解】(1) 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表出, 不妨设 $\alpha_3 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$,

其中 l_1, l_2 不全为零 (若 l_1, l_2 同时为 0, 则 α_3 为 0, 由 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ 可知 $\alpha_2 = 0$)

$$\because A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$$

$$\therefore A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\text{又 } A\alpha_3 = A(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2) = -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

$$\therefore -l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 整理得: } 2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

则 α_1, α_2 线性相关, 矛盾 (因为 α_1, α_2 分别属于不同特征值得特征向量, 故 α_1, α_2 线性无关).

故: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 P 可逆, $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$

$$= (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{即: } AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

FREEKAOYAN