2008 年研究生入学考试数学一试题及分析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】本题考查变上限积分求导.

【详解】令 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0$，得 $x=0$，故选（B）.

【评注】以下是变上限积分求导的推论：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $\varphi(x)$ 可导，$F(x)=\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P84【例 3.31】.

（2）函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

（A）i　　（B）$-i$　　（C）j　　（D）$-j$　　[　　]

【分析】本题考查梯度的计算.

【详解】
$$\mathrm{grad}f(x,y)\Big|_{(0,1)}=\left(\frac{\partial\arctan\frac{x}{y}}{\partial x}i+\frac{\partial\arctan\frac{x}{y}}{\partial y}j\right)\Bigg|_{(0,1)}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}i+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}j\right)\Bigg|_{(0,1)}=i.$$

故选（A）.

【评注】函数 $u=f(x,y)$ 的梯度为 $\mathrm{grad}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}i+\dfrac{\partial u}{\partial y}j$.

完全类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P302【例 11.22】.

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$（$C_1,C_2,C_3$ 是任意常数）为通解的是

（A） $y'''+y''-4y'-4y=0$ （B） $y'''+y''+4y'+4y=0$

（C） $y'''-y''-4y'+4y=0$ （D） $y'''-y''+4y'-4y=0$ [ ]

【分析】本题已知微分方程的通解，反求微分方程的形式，一般根据通解的形式分析出特征值，然后从特征方程入手.

【详解】因为 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ （C_1,C_2,C_3是任意常数）为通解，

所以微分方程的特征值为$1,\pm 2i$．于是特征方程为$(\lambda-1)(\lambda-2i)(\lambda+2i)=0$，即

$$\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0.$$

故微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$，故选（D）.

【评注】本题考查微分方程解的结构. 因为常系数齐次线性微分方程与其特征方程一一对应，所以本题的关键是要能够从所给的解中分析出特征方程的根.

完全类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P144【例 5.17】，文登强化班讲义《高等数学》第 7 讲【例 9】，【例 10】.

（4）设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是

（A）若$\{x_n\}$收敛，则 $f(\{x_n\})$收敛 （B）若$\{x_n\}$单调，则 $f(\{x_n\})$收敛

（C）若 $f(\{x_n\})$收敛，则$\{x_n\}$收敛 （D）若 $f(\{x_n\})$单调，则$\{x_n\}$收敛 [ ]

【分析】利用单调有界数列必收敛.

【详解】若 $\{x_n\}$单调，而由题设可知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，则 $f(\{x_n\})$单调有界，故收敛，故选（B）

【评注】本题为基础题型.

定理可见各教材和辅导讲义.

（5）设A为n阶非零矩阵，E为n阶单位矩阵，若$A^3=O$，则

（A） $E-A$不可逆，$E+A$不可逆 （B） $E-A$不可逆，$E+A$可逆

（C） $E-A$可逆，$E+A$可逆 （D） $E-A$可逆，$E+A$不可逆 [ ]

【分析】从$A^3=O$入手.

【详解】 $A^3=O\Rightarrow A^3+E=E\Rightarrow(A+E)(A^2-A+E)=E$，所以$A+E$可逆，

$A^3=O\Rightarrow A^3-E=-E\Rightarrow(E-A)(A^2+A+E)=E$，所以$E-A$可逆，

故选（C）.

【评注】也可这么求解：

A是幂零矩阵，只有零是其特征值，所以±1不是其特征值，故$E-A$和$E+A$都可逆.

完全类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P367【例 2.27】，文登强化班讲义《线性代数》第 2 讲【例 4】.

（6）设A为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程$(x,y,z)A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$在正交变换下的标准方程的图形如图所示，则$A$的正特征值的个数为

（A） 0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】由图可看出此二次曲面为旋转双叶双曲面.

【详解】旋转双叶双曲面的标准形式为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$，所以$A$的正特征值的个数为 1，

故选（B）.

【评注】本题为一道线性代数与空间解析几何的综合题，关键要记住标准二次曲面的方程和图形.

标准二次曲面的方程和图形见 08 版《数学复习指南》（理工类）P227.

（7）随机变量X,Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为

（A）$F^2(z)$　　　（B）$F(x)F(y)$

（C）$1-[1-F(x)]^2$　　　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$　　　[　　]

【分析】本题考查二维随机变量函数的分布，利用定义并结合X,Y独立性进行计算.

【详解】$P\{Z<z\}=P\{\max\{X,Y\}<z\}$

$$=P\{X<z,Y<z\}=P\{X<z\}P\{Y<z\}=F^2(z)$$，故选（A）.

【评注】本题为基础题型.

结论见《数学复习指南》(理工类)P512 表 7；几乎相同题目见《数学复习指南》(理工类)P528 第三篇第二章习题 2(6).

(8)随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,4)$，则相关系数 $\rho_{XY}=1$

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$　　[　　]

【分析】本题已知两个随机变量的相关系数和分布，考查两个变量的关系，应从 $\rho_{XY}=1$ 入手.

【详解】显然，$1=\rho_{XY}=\dfrac{EXEY-EXY}{DXDY}$，可知 X,Y 正相关，排除(A)(C)，将(B)(D)代入后，可知应选(D).

【评注】由 $Y \sim N(1,4)$ 可知 $\dfrac{Y-1}{2} \sim N(0,1)$，也可推得(D)入选.

类似习题见 08 版《数学复习指南》(理工类)P529 精选习题二 2(10).

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解 $y=$__________.

【分析】本题为变量可分离方程.

【详解】$xy'+y=0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x}$，两边积分得 $y=\dfrac{C}{x}$，将 $y(1)=1$ 代入得 $C=1$，

故 $y=\dfrac{1}{x}$.

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 08 版《数学复习指南》(理工类)P129【例 5.1】　【例 5.3】，文登强化班讲义《高等数学》第 7 讲【例 1】

(10)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是__________.

【分析】本题实质上为隐函数方程求导.

【详解】$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边对 x 求导得

$\cos(xy)(y+xy')+\dfrac{y'-1}{y-x}=1$，则 $y'\big|_{(0,1)}=1$，所以切线方程为

$y-1=x$，即 $y=x+1$.

【评注】注意隐函数求导时记住 y 是 x 的函数.

类似例题见 08 版《数学复习指南》P48（理工类）【例 2.20】，精选习题二 1（9）.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为________.

【分析】本题考查关于幂级数收敛域特征的阿贝尔定理. 由题中条件可知，该幂级数收敛区间的对称点为 $x=-2$，再结合已知条件进行推导.

【详解】因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 收敛区间的对称点为 $x=-2$，又由题设可知该级数在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-2)^n$ 发散，从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$，

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 $(-2+3, 2+3]$，即 $(1,5]$.

【评注】阿贝尔定理：设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0(\neq 0)$ 处收敛，则对于满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0(\neq 0)$ 发散，则对于满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

类似例题见 08 版《数学复习指南》(理工类) 精选习题七（7）

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$________

【分析】利用高斯公式即可.

【详解】添加曲面 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 4$，下侧，则

$$\iint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + \frac{1}{2}\iint_{\Sigma_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\cdot r^2\mathrm{d}r=4\pi.$$

【评注】$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 是因为被积函数关于 y 是奇函数，关于 zOx 面对称.

完全类似例题见 08 版《数学复习指南》(理工类) P297【例 11.16】，文登强化班讲义《高等数学》12 讲【例 5】

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为_________ .

【分析】本题考查矩阵特征值及相似矩阵的性质.

【详解】$A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，所以 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}=B$，即 A,B 相似，有相同的特征值，

易求出 B 的特征值为 0，1，所以 A 的非零特征值为 1.

【评注】也可以这么做. 显然 0 是 A 的特征值，对应的特征向量为 α_1.

由 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$ 可得 $A\alpha_2+2A\alpha_1=A(2\alpha_1+\alpha_2)=1\cdot(2\alpha_1+\alpha_2)$，

因为 α_1,α_2 线性无关，所以 $\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2$ 线性无关.

故 1 是 A 的另一特征值.

类似例题见 08 版《数学复习指南》(理工类)【例 5.26】，文登强化班讲义《线性代数》第 5 讲【例 15】.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ _________ .

【分析】先写出服从参数为 1 的泊松分布的概率分布，然后求解.

【详解】服从参数为 1 的泊松分布的概率分布为：$P(X=i)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{i!}$

而 $EX^2=DX+(EX)^2=1+1=2$，

所以 $P\{X=EX^2\}=P\{X=2\}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

【评注】本题考查泊松分布的概率分布和数字特征. 请记住

$$X\sim P(\lambda): P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots；EX=DX=\lambda.$$

相关结论见 08 版《数学复习指南》（理工类）第三篇第二章和第三章中的知识点精讲.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） **(本题满分 9 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

【分析】利用等价无穷小代换和洛必达法则即可.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin\left(\sin x\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left[1-\cos\left(\sin x\right)\right]}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\sin x\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P25【例 1.24】，文登强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 17】.

（16） **(本题满分 9 分)**

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $\left(0,0\right)$ 到点 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

【分析】本题考查曲线积分的计算.，利用将路径表达式可直接代入被积式中的特点简化运算.

【详解】 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2x\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.$$

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P288【例 11.3】，文登强化班讲义《高等数学》第 12 讲【例 5】，【例 6】.

（17） **(本题满分 11 分)**

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线$C$距离$xOy$面最远的点和最近的点.

【分析】设(x,y,z)为曲线C上的任意一点，则(x,y,z)到xOy面的距离为$|z|$.

【详解】设曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$上的任意一点为$(x,y,z)$，则$(x,y,z)$到$xOy$面的距离为$|z|$，等价于求函数$H=z^2$在条件$x^2+y^2-2z^2=0$与$x+y+3z=5$下的最大值点和最小值点.

设$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\mu\left(x+y+3z-5\right)$.

由

$$\begin{cases}F_x'=2\lambda x+\mu=0\\F_y'=2\lambda y+\mu=0\\F_z'=2z-4\lambda z+3\mu=0\\x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$$

解之得$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$.

根据几何意义，曲线C上存在距离xOy面最远的点和最近的点，故所求点依次为$(-5,-5,5)$和$(1,1,1)$.

【评注】本题实质为求多元函数的最值. 因为(x,y,z)满足$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，所以$z^2=\dfrac{x^2+y^2}{2}$，并可由$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$消去$z$得 $x^2+y^2-2\left(\dfrac{5-x-y}{3}\right)^2=0$.

令$L(x,y,\lambda)=\left(x^2+y^2\right)+\lambda\left(x^2+y^2-2\left(\dfrac{5-x-y}{3}\right)^2\right)$，也可求得最值.

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P256【例 9.40】，精选习题九 12 题，完全类似例题见文登强化班讲义《高等数学》第 9 讲【例 17】.

（18）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是连续函数，

（Ⅰ）利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

（Ⅱ）当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【分析】（Ⅰ）利用积分中值定理可证；（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结论.

【详解】（Ⅰ）若 $x\in(0,+\infty)$，设 x 获得增量 Δx，使得 $x+\Delta x\in(0,+\infty)$，则 $F(x)$ 在 $x+\Delta x$ 出的函数值为 $F(x+\Delta x)=\int_0^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$，

由此得函数的增量 $\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)$

$$=\int_0^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

应用积分中值定理，有等式 $\Delta F=f(\xi)\Delta x$，ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

在上式两端各除以 Δx，得

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(\xi).$$

由于假设函数 $f(x)$ 连续，而 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，

因此 $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$.

所以函数 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$.

（Ⅱ）**证法 1**　要证明 $G(x)$ 以 2 为周期，即要证明对任意的 x，都有 $G(x+2)=G(x)$，

记 $H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$H'(x)=\left(2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'-\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'$$

$$=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2f(x)+\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=0,$$

又因为 $H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)-0=0$，

所以 $H(x)=0$，即 $G(x+2)=G(x)$.

证法 2　由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，所以对任意的 x，都有 $f(x+2)=f(x)$，于是

$$G(x+2)-G(x)=\left(2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)-\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$=2\left[\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=2\left[\int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=2\left[\int_0^x \left[f(t+2)-f(t)\right]\mathrm{d}t\right]=0.$$

即$G(x)$也是以 2 为周期的周期函数.

【评注】本题（Ⅰ）为教材中一定理，具体证明可见教材. 记住以下结论：

设 $f(x)$是周期为T 的连续函数，则对任意的实数t都有$\int_t^{t+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

相关结论见 08 版《数学复习指南》（理工类）第一篇第三章.

（19） **(**本题满分 11 分)

$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$，展开成余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

【分析】本题考查傅立叶级数的展开，直接利用公式.

【详解】因为 $f(x)=1-x^2$是偶函数，所以$b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2},n=1,2,\cdots,$$

所以 $f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

令$x=0$，代入上式，可求得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

【评注】需记住傅立叶级数的展开公式

完全类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P209【例 7.30】 【例 7.31】.

（20） **(**本题满分 10 分)

设α,β是 3 维列向量，矩阵$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha^{\mathrm{T}}$，$\beta^{\mathrm{T}}$分别为$\alpha$，$\beta$的转置.

证明：（Ⅰ）秩$r(A)\le 2$；（Ⅱ）若α,β线性相关，则秩$r(A)<2$.

【分析】本题考查矩阵的秩，可利用矩阵秩的相关推论.

【详解】（Ⅰ）$r(A)=r(\alpha\alpha^{\mathrm T}+\beta\beta^{\mathrm T})\le r(\alpha\alpha^{\mathrm T})+r(\beta\beta^{\mathrm T})\le r(\alpha)+r(\beta)\le 2$.

（Ⅱ）若α,β线性相关，不妨设$\beta=k\alpha$，于是

$A=\alpha\alpha^{\mathrm T}+\beta\beta^{\mathrm T}=(1+k^2)\alpha\alpha^{\mathrm T}$，

所以$r(A)=r((1+k^2)\alpha\alpha^{\mathrm T}+\beta\beta^{\mathrm T})=r(\alpha\alpha^{\mathrm T})\le r(\alpha)\le 1<2$.

【评注】$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$，$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$.

相关结论见 08 版《数学复习指南》（理工类）第二篇第二章.

（21）**(本题满分 12 分)**

设n元线性方程组$Ax=b$，其中

矩阵$A=\begin{bmatrix}2a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1\\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a\end{bmatrix}_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，$b=(1,0,\cdots,0)$，

（Ⅰ）证明行列式$A=(n+1)a^n$；

（Ⅱ）当a为何值时，该方程组有惟一解，并求x_1；

（Ⅲ）当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

【分析】（Ⅰ）为 n 阶行列式的求解，可利用递推法；（Ⅱ）（Ⅲ）利用通常的方法.

【详解】（Ⅰ）$D_n=A=\begin{matrix}2a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2a & 1\\ 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a\end{matrix}=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$.

现用数学归纳法证明.

$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2=(2+1)a^2$.

假设$n\le k$时，$D_k=(k+1)a^k$，

则$n=k+1$时，有.

$$D_{k+1}=2aD_k-a^2D_{k-1}$$

$$=2a(k+1)a^k-a^2ka^{k-1}=(k+2)a^{k+1},$$

综上可得，$|A|=(n+1)a^n$.

（II）$|A|=(n+1)a^n\neq 0$，即 $a\neq 0$ 时，方程组有惟一解，设将 A 的第一列用 b 替换后所得矩阵为 A_1，根据克莱姆法则可得

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{D_{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}.$$

（III）当 $a=0$ 时，方程组有无穷多解．此时

$$A=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}_{n\times n}$$，则 $Ax=0$ 的同解方程组为 $\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\\\cdots\\x_n=0\end{cases}$.

易求得 $Ax=0$ 的基础解系为 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

因为 $A\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的特解，

从而 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$，其中 k 为任意常数.

【评注】 n 阶方阵的求解见 08 版《数学复习指南》（理工类）P346【例 1.18】，方程组求解类似例题见《数学复习指南》（理工类）P411【例 4.9】，文登强化班讲义《线性代数》第 4 讲【例 4】．

（22） **(本题满分 11 分)**

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$，

（I）求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$.

（II）求 Z 的概率密度.

【分析】（I）求条件概率，可直接利用公式求解；（II）可先求出分布函数，然后求导即为所求密度函数.

【详解】（I） $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=\dfrac{P\left\{Z\le\frac{1}{2},X=0\right\}}{P\{X=0\}}$

$$=\frac{P\left\{Y\le\frac{1}{2}\right\}P\{X=0\}}{P\{X=0\}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）设 Z 的分布函数为 $F(z)$，则其值域非零时 z 的区间为 $[-1,2]$.

当 $z<-1$ 时，$F(z)=0$；

当 $z>2$ 时，$F(z)=1$；

当 $-1\le z<2$ 时，

$$F(z)=P\{Z<z\}=P\{X+Y<z\}$$

$$=P\{X+Y<z\mid X=-1\}P\{X=-1\}+P\{X+Y<z\mid X=0\}P\{X=0\}$$

$$+P\{X+Y<z\mid X=1\}P\{X=1\};$$

$$=\frac{1}{3}\left[P\{Y<z+1\}+P\{Y<z\}+P\{Y<z-1\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right].$$

所以 Z 的分布密度函数为

$$f(z)=F'(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P518【例 2.38】 【例 2.39】，文登强化班讲义《概率统计》第 3 讲【例 4】

（23） **(本题满分 11 分)**

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

（1） 证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

（2） 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

【分析】（1）要证 $ET=\mu^2$；（2）求 DT 时，利用 $\overline{X}^2$ 与 S^2 独立性.

【详解】（1） $ET=E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E\left(\bar{X}^2\right)-\frac{1}{n}E\left(S^2\right)$

$$=D\left(\bar{X}\right)+E\left(\bar{X}\right)^2-\frac{1}{n}E\left(S^2\right)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2.$$

所以T是μ^2的无偏估计量.

（2）当$\mu=0,\sigma=1$时，$X\sim N\left(0,1\right)$，$\bar{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$ET=0$.

$DT=D\left(X^2-\frac{1}{n}S^2\right)$ （注意X^2与S^2独立）

$$=D\left(X^2\right)+\frac{1}{n^2}D\left(S^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}D\left(\ nX\right)^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(n-1\right)^2}D\left[\left(n-1\right)S^2\right]$$

$$=\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(n-1\right)^2}\cdot2\left(n-1\right)=\frac{2}{n(n-1)}.$$

【评注】若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则

$$EX=\mu,DX=\frac{1}{n}\sigma^2,ES^2=\sigma^2,D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right)=2\left(n-1\right)\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2\left(n-1\right)\right).$$

类似例题见 08 版《数学复习指南》（理工类）P571【例 5.1】 【例 5.2】，文登强化班讲义《概率统计》第 6 讲【例 1】 【例 2】.