2009 年全国硕士研究生入学统一考试

农学门类联考数学试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）在 $(-\pi,\pi)$ 内，函数 $y=\dfrac{x}{\tan x}$ 的可去间断点的个数为（　　）

$(A).0$　　　$(B).1$　　　$(C).2$　　　$(D).3$

【答案】(D)

【解析】$y=\dfrac{x}{\tan x}$

$x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，$x=0$ 为可去间断点；

$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点。故共 3 个，选 (D)

（2）函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调增加图形为凹的区间是（　　）

$(A).(-\infty,-1)$　　　$(B).(-1,0)$　　　$(C).(0,1)$　　　$(D).(1,+\infty)$

【答案】C

【解析】

$$y'=\frac{2x}{1+x^2}>0\Rightarrow x>0$$

$$y''=\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\left(1+x^2-x\cdot 2x\right)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}>0\Rightarrow -1<x<1$$

取交集得：$x\in(0,1)$，选 C。

（3）函数 $f(x)=\int_0^{x-x^2}e^{-t^2}dt$ 的极值点为 $x=$（　　）

$(A).\dfrac{1}{2}$　　　$(B).\dfrac{1}{4}$　　　$(C).-\dfrac{1}{4}$　　　$(D).-\dfrac{1}{2}$

【答案】A

【解析】因 $f'(x)=e^{-\left(x-x^2\right)^2}\cdot\left(x-x^2\right)'=(1-2x)e^{-\left(x-x^2\right)^2}$

令　$f'(x)=0$　，　得　$x=\dfrac{1}{2}$　，　又

$$f''(x) = -2e^{-(x-x^2)^2} + (1-2x)\cdot e^{-(x-x^2)^2}\cdot\left[-(x-x^2)^2\right]' = -\left[2+2(1-2x)^2\cdot(x-x^2\right]e^{-(x-x^2)^2}$$

得 $f''\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故 $x=\frac{1}{2}$ 为极值点，应选 A。

（4）设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x\leq x^2+y^2\leq 2x, y\geq 0\right\}$，则在极坐标下二重积分 $\iint xydxdy=$

（　）

$(A)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta dr$　　$(B)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

$(C)\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta d$　　$(D)\int_0^{\pi}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

【答案】B

【解析】原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr$

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & ab+4 & 2\\ 2 & 4 & a+2\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则（　）

$(A).a=0,b=0$　$(B).\ a=0,b\neq 0$　$(C).a\neq 0,b=0$　$(D).a\neq 0,b\neq 0$

【答案】(C)

【解析】$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & ab+4 & 2\\ 2 & 4 & a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & ab & 0\\ 2 & 0 & a\end{pmatrix}$

因为 $a=0$ 时，$r(A)=1$，所以 $a\neq 0$，$A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & ab & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$

因为 $r(A)=2$，所以 $b=0$，综上 $a\neq 0,b=0$。

（6）设 A 为 3 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A|=2$，则 $|-2A^*|=$（　）

$(A).\ -2^5$　$(B).\ -2^3$　$(C).\ 2^3$　$(D).\ 2^5$

【答案】A

【解析】$\because |A|=2$

又$\because |A^*|=|A|^{n-1}=|A|^{3-1}=|A|^2=2^2$

$\therefore |-2A^*|=(-2)^3\cdot|A^*|=(-2)^3\cdot 2^2=-2^5$

（7）设事件 A 与事件 B 互不相容,，则（　　）

$(A).P=(\bar{A}\bar{B})=0$　　　　$(B).P=(AB)=P(A)P(B)$

$(C).P(A)=1-P(B)$　　　　$(D).P=(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

【答案】(D)

【解析】因为 A,B 互不相容，所以 $P(AB)=0$

(A) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$，因为 $P(A\cup B)$ 不一定等于 1，所以 (A) 不正确

(B) 当 $P(A),P(B)$ 不为 0 时，(B) 不成立，故排除

(C) 只有当 A,B 互为对立事件的时候才成立，故排除

(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$，故 (D) 正确。

（8）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $EX=$（　　）

$(A).0$　　$(B).0.3$　　$(C).0.7$　　$(D).1$

【答案】(C)

【解析】因为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，

所以 $F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)$，

所以 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\Phi'(x)+0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]dx$

$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx$

而$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)\,dx = 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \ \ \underline{\underline{\frac{x-1}{2}=u}}\ \ 2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)\,du = 2$

所以$EX = 0 + 0.35\times 2 = 0.7$。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin\frac{x}{3})^{\frac{2}{x}} =$______________

【答案】$e^{\frac{2}{3}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin\frac{x}{3})^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2}{x}\ln(1+\sin\frac{x}{3})} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1+\sin\frac{x}{3})} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{3}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x}{3}}{x}} = e^{\frac{2}{3}}$

（10）设 $f(x) = \ln(4x + \cos^2 2x)$，则 $f'(\frac{\pi}{8}) =$______________

【答案】$\frac{4}{\pi+1}$

【解析】由 $f(x) = \ln(4x+\cos^2 2x)$, $f'(x) = \frac{1}{4x+\cos^2 2x}\left[4 + 2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\right]$

$$f'(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}}\left[4 + 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right] = \frac{2}{\pi+1}(4-2) = \frac{4}{\pi+1}$$

（11）设 $f(x) = e^{2x}$，$\varphi(x) = \ln x$，则$\int_0^1\left[f(\varphi(x)) + \varphi(f(x))\right]dx =$______________

【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】

$f(\varphi(x)) = e^{2\ln x} = x^2$

$\varphi(f(x)) = \ln e^{2x} = 2x$

所以原式$=\int_0^1 (x^2+2x)\,dx = (\frac{x^3}{3}+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$

（12）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$Z = f(\sin(x+y), e^{xy})$，则$\frac{\partial z}{\partial x} =$______________

【答案】$f'_1\cos(x+y) + yf'_2 e^{xy}$

【解析】根据复合函数求导法得：$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1\cos(x+y) + yf'_2 e^{xy}$

（13）设向量组$\alpha=(1,0,1)^T$，$\beta=(2,k,-1)^T$，$\gamma=(-1,1,-4)^T$线性相关，则$k=$__________

【答案】1

【解析】$\alpha=(1,0,1)^T,\beta=(2,k,-1)^T,\gamma=(-1,1,-4)^T$

令$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&k&1\\1&-1&-4\end{pmatrix}$

若α、β、γ线性相关，所以则$|A|=-3k+3=0$，$\therefore k=1$

(14)设总体X的概率密度$f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中参数$\sigma(\sigma>0)$未知，

若$x_1,x_2,....,x_n$是来自总体X的简单随机样本，$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$是$\sigma$的估计量，则

$E(\hat{\sigma})=$____________

【答案】$\dfrac{n}{n-1}\sigma$

【解析】

$$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E|x_i|=\frac{n}{n-1}E|x_i|$$

$$=\frac{n}{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}\cdot e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\frac{2n}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{x}{2\sigma}\cdot e^{-\frac{x}{\sigma}}dx\xrightarrow{t=\frac{x}{\sigma}}\frac{n}{n-1}\int_0^{+\infty}te^{-t}\sigma dt$$

$$=\frac{n\sigma}{n-1}\int_0^{+\infty}te^{-t}\sigma dt$$

$$=\frac{n}{n-1}\sigma$$

三、解答题：15－23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}$$

（16）（本题满分 10 分）不定积分 $\int \frac{\ln\left(2+\sqrt{x}\right)}{x+2\sqrt{x}}dx$

【解析】令 $\sqrt{x}=t, x=t^2, dx=2tdt$

原式=

$$\int \frac{\ln(2+t)}{t^2+2t}\cdot 2tdt = 2\int \frac{\ln(2+t)}{t+2}dt = 2\int \ln(2+t)d\ln(2+t) = \ln^2(2+t)+c = \ln^2(2+\sqrt{x})+c$$

（17）（本题满分 10 分）曲线 L 过点 $(1,1)$，L 上任一点 $M(x,y)(x>0)$ 处法线斜率 $\frac{2y}{x}$，求 L 方程。

【解析】

法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$

$$\therefore -\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{x} \Rightarrow -xdx = 2ydy$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = y^2 + C_1$$

又由已知条件 $y(1)=1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + y^2 - \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{3-2y^2}$$

（18）（本题满分 11 分）讨论方程 $x^4-4x+k=0$ 实根的个数，其中 k 为参数。

【解析】令 $f(x)=x^4-4x+k$，则 $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调减，在 $(1,+\infty)$ 单调增，在 $x=1$ 处取得极小值，且为最小值。从而

① $f(1)=k-3>0$ 时，方程无实根；

② $f(1)=k-3=0$ 时，方程有两个相同的实根；

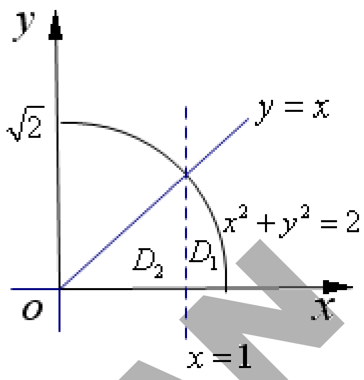
③ $f(1)=k-3<0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，根据零点定理可得，方程有两个相异实根。

（19）计算二重积分 $\iint\limits_D |x-1|dxdy$，其中 D 是第一象限内由直线 $y=0, y=x$ 及圆

$x^2+y^2=2$ 所围成的区域。（本题满分 11 分）

【解析】如图所示，则由题可知

$$\iint\limits_{D}|x-1|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(1-x)dxdy$$



$$=\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(x-1)dy+\int_0^1dx\int_0^x(1-x)dy$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}(x-1)\sqrt{2-x^2}dx+\int_1^0x(1-x)dx$$

$$=(\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{6}=1-\frac{\pi}{4}$$

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & a+2 & a+1\\ -1 & a-2 & 2a-3\end{pmatrix}$,若存在 3 阶非零矩阵 B ,使得 $AB=O$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $AX=0$ 的通解。

【解析】

（I）根据题目条件，知存在 3 阶非零矩阵 B ，使 $AB=0$，即 $AX=0$ 有非零解。

$\therefore |A|=0$，即 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & a+2 & a+1\\ -1 & a-2 & 2a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & a & a\\ 0 & a & 2a-2\end{vmatrix}=a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 或 $a=2$

（II）当 $a=0$ 时， $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$，求 $AX=0$ 的通解。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

取自由未知量 $x_2=1$，得 $\xi_1=[-2,1,0]^T$，即 $AX=0$ 的通解 $x=k_1\xi_1=k_1[-2,1,0]^T$，（k_1 为任意常数）。

当$a=2$时，$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&4&3\\-1&0&1\end{bmatrix}$，求$AX=0$的通解。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&4&3\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&2&2\\0&2&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

取自由未知量$x_3=1$，得$\xi_2=\left[1,-1,1\right]^T$，即$AX=0$的通解$x=k_2\xi_2=k_2\left[1,-1,1\right]^T$，（$k_2$为任意常数）。

（21）（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵A的特征值为1，1，-2，对应的特征向量依次为$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求矩阵A；

（Ⅱ）求A^{2009}。

【解析】（Ⅰ）令$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$, 则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$, 即$A=P\Lambda P^{-1}$, 利用初等行变换求$P^{-1}$, 有

$$\left(P\middle|E\right)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\left(P|E\right)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

即 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

（II）

$\because A=P\Lambda P^{-1}$

$$\therefore A^{2009}=P\Lambda^{2009}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2^{2009}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2^{2008}&0&\frac{1}{2}+2^{2008}\\0&1&0\\\frac{1}{2}+2^{2008}&0&\frac{1}{2}-2^{2008}\end{bmatrix}.$$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x,a<x<b\\0,\text{其他}\end{cases}$ ，且 $EX^2=1$

（Ⅰ）求 a,b 的值;

（Ⅱ）求 $P\{|X|<1\}$。

【解析】（1） $f\left(x\right)=\begin{cases}2x,a<x<b\\0,\ \text{其它}\end{cases}$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b 2xdx = b^2 - a^2 = 1 \quad ①$$

$$E(x^2) = \int_a^b 2x^3 dx = \frac{1}{2}(b^4 - a^4) = 1 \quad ②$$

由①②得到$\begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b^4 - a^4 = 2 \end{cases}$推得到$\begin{cases} b^2 = \dfrac{3}{2} \\ a^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

由概率密度函数的非负性，知$a > 0, b > 0$则$\begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

（2）

$$P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = P\left(-1 < X < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} < X < 1\right) = 0 + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 2xdx = \frac{1}{2}$$

（23）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

且$P\{X = Y\} = \dfrac{1}{4}$

（Ⅰ）求二维随机变量(X,Y)的概率分布；

（Ⅱ）求 X 与 Y 的相关系数ρ_{XY}。

【解析】（1）$P(X = Y) = \dfrac{1}{4}$，即$P(X = 1, Y = 1) = \dfrac{1}{4}$

所以$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) - P(X = 1, Y = 1) = \dfrac{1}{4}$

同理可得$P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1, Y = 0) = P(Y = 0) = \dfrac{1}{4}$

得到$P(X = -1, Y = 0) = 0$

$$P(X=-1,Y=1)=1-P(X=1,Y=0)-P(X=1,Y=1)-P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{2}$$

则二维随机变量(X,Y)的概率分布是

$X \backslash Y$	-1	1	$p_{i.}$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{.j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

（2）由 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

由二维随机变量(X,Y)的概率分布得到

XY	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

X 的边缘分布

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y 的边缘分布

Y	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

则$E(XY)=-P(XY=-1)+0\cdot P(XY=0)+1\cdot P(XY=1)=-\dfrac{1}{4}$

$$E(X)=-P(X=-1)+1\cdot P(X=1)=0$$

$$E(Y)=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)=\frac{3}{4}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{3}{16}$$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-\frac{1}{4}-0}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{3}{16}}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$