2010 年全国硕士研究生入学统一考试

农学门类联考

数学试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^3}{\left(x-3\right)\left(x-e\right)}$，则 (　　)

(A) $x=3$ 及 $x=e$ 都是 $f\left(x\right)$ 的第一类间断点

(B) $x=3$ 及 $x=e$ 都是 $f\left(x\right)$ 的第二类间断点

(C) $x=3$ 是 $f\left(x\right)$ 的第一类间断点，$x=e$ 都是 $f\left(x\right)$ 的第二类间断点

(D) $x=3$ 是 $f\left(x\right)$ 的第二类间断点，$x=e$ 都是 $f\left(x\right)$ 的第一类间断点

答案：C

详解：$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^x-e^3}{\left(x-3\right)\left(x-e\right)}=\dfrac{1}{3-e}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}=\dfrac{1}{3-e}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^x}{1}=\dfrac{e^3}{3-e}$,

$$\lim_{x\to e}\frac{e^x-e^3}{\left(x-3\right)\left(x-e\right)}=\frac{e^e-3}{e-3}\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}=\infty,$$

$\therefore$ $x=3$ 是 $f\left(x\right)$ 的第一类间断点,

$x=e$ 是 $f\left(x\right)$ 的第二类间断点.

(2) 曲线 $y=\dfrac{x}{\left(x-4\right)^2}$ 的凸弧区间是 (　　)

(A) $\left(-\infty,-8\right)$　　(B) $\left(-8,-4\right)$　　(C) $\left(-4,4\right)$　　(D) $\left(4,+\infty\right)$

答案：A

详解：$y=\dfrac{x}{\left(x-4\right)^2}$，$y'=\dfrac{-x-4}{\left(x-4\right)^3}$，$y''=\dfrac{2x+16}{\left(x-4\right)^4}<0$,

$\therefore$ 在 $\left(-\infty,-8\right)$ 上，曲线是凸的

(3) 设函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 具有二阶导数，$g\left(x_0\right)=a,g'\left(x_0\right)=0,g''\left(x\right)<0$，则 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 在

x_0 取极大值的一个充分条件是 ( )

(A) $f'(a)<0$ (B) $f'(a)>0$ (C) $f''(a)<0$ (D) $f''(a)>0$

答案：B

详解：$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}'=f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$,

$\left\{f\left[g(x)\right]\right\}''=f''\left[g(x)\right]\left[g'(x)\right]^2+f'\left[g(x)\right]\cdot g''(x)$，由于 $g'(x_0)=0$，得：

$\left\{f\left[g(x_0)\right]\right\}''=f'\left[g(x_0)\right]\cdot g''(x_0)=f'(a)\cdot g''(x_0)<0$.

由于 $g''(x_0)<0$，所以 $f'(a)>0$

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，$0<f(x)<1$，且 $\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2}$，记 $I_1=\int_0^1\int_0^1\sqrt{f(x)(1-f(y))}dxdy$，$I_2=\int_0^1\int_0^1 f(x)(1-f(y))dxdy$，$I_3=\int_0^1\int_0^1(f(x)f(y))dxdy$，则 ( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_1<I_3<I_2$ (C) $I_2<I_1<I_3$ (D) $I_3<I_2<I_1$

答案：D

详解：$I_1=\int_0^1\sqrt{f(x)}dx\cdot\int_0^1\sqrt{1-f(y)}dy=\int_0^1\sqrt{f(x)}dx\cdot\int_0^1\sqrt{1-f(x)}dx$

$I_2=\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\left[1-f(y)\right]dy=\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\left[1-f(x)\right]dx$

$I_3=\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)dx$,

由于 $0<f(x)<1$，所以 $\sqrt{f(x)}>f(x)$，$\sqrt{1-f(x)}>1-f(x)$

$\therefore\int_0^1\sqrt{f(x)}dx>\int_0^1 f(x)dx$，$\therefore\int_0^1\sqrt{1-f(x)}dx>\int_0^1\left[1-f(x)\right]dx$，$\therefore I_1>I_2$.

又 $\int_0^1\left[1-f(x)\right]dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$，且 $\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2}$.

$\therefore\int_0^1\left[1-f(x)\right]dx>\int_0^1 f(x)dx$,

$\therefore I_2>I_3$，$\therefore I_1>I_2>I_3$

(5) 设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示，下列正确的是 ( )

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$ (B) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$ (D) 若向量组 II 线性相关，则 $r>s$

答案：A

详解：由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示，所以 $r(I)\le r(II)$，即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组 I 线性无关，则 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$，所以 $r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$，即 $r\le s$，选(A).

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于 ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

答案：D

详解：设 λ 为 A 的特征值，由于 $A^2+A=0$，所以 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $(\lambda+1)\lambda=0$，这样 A 的特征值为-1 或 0。由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，

因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$。

(7) 设随机变量 X 服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，事件 $A=\{0<X<1\}$，$B=\left\{|X|<\frac{1}{4}\right\}$，则( )

(A) $P(AB)=0$ (B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(A)+P(B)=1$ (D) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

答案：D

详解：$P(AB)=P(0<x<1;-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4})=P(0<x<\frac{1}{4})=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$

$P(A)=P(0<x<1)=\frac{1}{2}$

$P(B)=P(-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4})=\frac{\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

(8) 设 $X_1,\ldots,X_n$ 使来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ $\sigma>0$ 的简单随机样本，记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则

$ET=$ （ ）

(A) σ^2 (B) μ^2 (C) $\sigma^2+\mu^2$ (D) $\sigma^2-\mu^2$

答案：C

详解：$ET=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n}\cdot n\left[DX_i+E^2(X_i)\right]=\sigma^2+u^2$

所以选择 C 项

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x=$ _________.

答案：e^a

详解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{a}}\right]^{\frac{ax}{x-a}}=e^a$

(10) 曲线 $y=\frac{2x^2+\sin x}{\cos x-x^2}$ 的水平渐近线的方程为 $y=$ _________.

答案：$y=-2$

详解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sin x}{\cos x-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{\cos x}{x^2}-1}=\frac{2+0}{0-1}=-2$

(11) 已知一个长方形的长 x 以 0.2m/s 的速率增加，宽 y 以 0.3m/s 的速率增加，当 $x=12m$，$y=5m$ 时，其面积增加的速率为 _________.

答案：$4.6m/s$

详解：设 $x=x(t),y=y(t)$，

由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=0.2,y'(t_0)=0.3$，

又 $S(t)=x(t)y(t)$，所以 $S'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$

所以 $S'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=0.2\cdot5+12\cdot0.3=4.6$

(12) 函数 $z=\dfrac{y^x-1}{y}$ 在点 $(1,e)$ 的全微分 $dz\big|_{(1,e)}=$ ________.

答案：$dx+\dfrac{1}{e^2}dy$

详解：因为 $z=\dfrac{y^x-1}{y}$，所以 $z\big|_{(1,e)}=1-\dfrac{1}{e}$，且变形为

$$yz=y^x-1=e^{x\ln y}-1$$

对上式两端微分，有 $zdy+ydz=e^{x\ln y}\left(\ln ydx+x\cdot\dfrac{1}{y}dy\right)=y^x\left(\ln ydx+\dfrac{x}{y}dy\right)$

所以 $\qquad dz=\dfrac{y^x\ln y}{y}dx+\dfrac{xy^x-yz}{y^2}dy$

所以 $\qquad dz\big|_{(1,e)}=dx+\dfrac{1}{e^2}dy$

(13)设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$，$A^T$ 为 A 的转置矩阵，则行列式 $\left|A^TA\right|=$ ________.

答案：0

详解：A^TA 是 3 阶矩阵，A 为 2×3 矩阵

$$\therefore r(A^TA)\le r(A)\le 2,\quad \therefore \left|A^TA\right|=0$$

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\theta(1-\theta)^{k-1},k=1,2,\cdots$，其中 $0<\theta<1$，若 $P\{X\le 2\}=\dfrac{5}{9}$，则 $P\{X=3\}=$ ________.

答案：$\dfrac{4}{27}$

详解：$P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\theta(1-\theta)^{1-1}+\theta(1-\theta)^{2-1}=\theta+\theta(1-\theta)$

$\Rightarrow 2\theta-\theta^2=\dfrac{5}{9}$ 得 $\theta=\dfrac{1}{3},\theta=\dfrac{5}{3}$（舍）

$$P(X=3)=\theta(1-\theta)^2=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{27}$$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\ln\tan\dfrac{x}{2}+e^{-x}\cos 2x$，求 $f''(\dfrac{\pi}{2})$

详解：$f(x)=\ln\tan\dfrac{x}{2}+e^{-x}\cos 2x$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-e^{-x}\cos 2x+e^{-x}(-2\sin 2x)$

$$=\csc x-e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x$$

所以 $f''(x)=-\cot x\cdot\csc x+e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\cdot 2\sin 2x-2(-e^{-x}\sin 2x+e^{-x}\cdot 2\cos 2x)$

$$=-\cot x\cdot\csc x+e^{-x}(4\sin 2x-3\cos 2x)$$

所以 $f''(\dfrac{\pi}{2})=3e^{-\frac{\pi}{2}}$

(16)(本题满分 10 分)

计算定积分 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$

详解：令 $t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2tdt$

所以 $I=\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2tdt=2\int_0^{\pi}t^2d\sin t=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}4t\sin tdt$

$$=\int_0^{\pi}4td\cos t=4t\cos t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos tdt=-4\pi$$

(17)(本题满分 11 分)

设某农作物长高到 $0.1\,m$ 后，高度的增长速率与现有高度 y 及 $(1-y)$ 之积成比例(比例系数 $k>0$)，求此农作物生长高度的变化规律(高度以 m 为单位).

详解：由题意得 $\dfrac{dy}{dt}=ky(1-y)$

即 $\int\dfrac{dy}{y(1-y)}=\int kdt$，所以 $\ln\left|\dfrac{y}{y-1}\right|=kt+C_1$

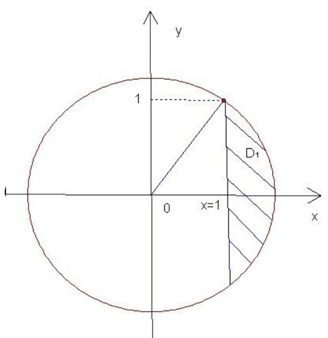
解得 $y=\dfrac{Ce^{kt}}{Ce^{kt}-1}$ $\quad(y\geq 0.1m)$

代入初始条件 $y(0)=0.1$ 解得 $C=-\dfrac{1}{9}$

所以化简得 $y=\dfrac{e^{kt}}{e^{kt}+9}$

(18)(本题满分 11 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left[x+\sin(xy)\right]dxdy$，其中区域



$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2, x\ge 1\right\}$.

详解：$I=\iint\limits_D [x+\sin(xy)]dxdy=\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D \sin(xy)dxdy$

因为 D 关于 x 轴对称，且 $\iint\limits_D \sin(xy)dxdy$ 的被积函数为 y 的奇函数

所以 $\iint\limits_D \sin(xy)dxdy=0$

又因为

$$\iint\limits_D xdxdy=2\iint\limits_{D_1} xdxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta}^{\sqrt{2}} r\cos\theta\cdot rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\, d\theta\cdot\int_{\sec\theta}^{\sqrt{2}} r^2dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{3}\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{3}\sec^2\theta d\theta=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

(19)(本题满分 10 分)

证明：$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e(x>0)$

证明：令 $F(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\quad(x>0)$

对等式两边同时取对数，$\ln F(x)=(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$

对等式两边同时求导数得：$\frac{1}{F(x)}\cdot F'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})+(x+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}$

又因为 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$

$\therefore \ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}\qquad \therefore \frac{1}{F(x)}\cdot F'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}<0$

又 $\because F(x)>0$，$\therefore F'(x)<0\quad \therefore F(x)$ 单调递减

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})=e$

所以 $F(x)>e,\quad \therefore (1+\frac{1}{x})^{x+1}>e$

(20)(本题满分 10 分)

设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有 2 个不同的解，求 a 的值和方程组 $Ax=\beta$ 的通解

详解：(I)　已知 $Ax=\beta$ 有 2 个不同的解

$\therefore r(A)=r(A,\beta)<3$

又 $|A|=0$　$(a-1)^2(a+1)=0$　知 $a=1$ 或 -1

当 $a=1$ 时，$r(A)=1\neq r(A,\beta)=2$ 此时 $Ax=\beta$ 无解

$\therefore a=-1$

(II) $(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

原方程组等价为 $\begin{cases} x_1-x_3=\frac{3}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1=x_3+\frac{3}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2} \\ x_3=x_3 \end{cases}$　$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore Ax=\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数。

(21)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，6 是 A 的一个特征值，

(I)求 a 的值；(II)求 A 的全部特征值和特征向量.

详解：(I)由于 6 是 A 的特征值，故 $|6E-A|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -a \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12a+24=0$$

由此可得 $a=-2$

(II) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$$

故 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=2, \lambda_3=6$

由 $(2E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解得基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2, k_1, k_2$ 为不同时为零的常数

由 $(6E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解得基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，故对应于 $\lambda_3=6$ 的全部特征向量为 $k_3\xi_3, k_3$ 为不为零的常数。

(22)(本题满分 10 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	0	a
1	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{12}$

且 $p\left\{X+Y=1 \mid X=0\right\}=\frac{1}{3}$. 求

(I)常数 a,b； (II) $Cov(X,Y)$.

详解：(I)由二维离散型随机变量分布律的性质可得

$$\frac{1}{3}+a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{12}=1 \quad ①$$

$$P\left\{X+Y=1\middle|X=0\right\}=\frac{P\left\{X+Y=1,X=0\right\}}{P\left\{X=0\right\}}=\frac{P\left\{X=0,Y=1\right\}}{P\left\{X=0\right\}}=\frac{a}{\frac{1}{3}+a}=\frac{1}{3} \quad ②$$

由①，②可得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{6}$

(II) $Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)$

$$E\left(XY\right)=1\times(-1)\times\frac{1}{4}+1\times1\times\frac{1}{12}=\frac{-1}{6}$$

$$E\left(X\right)=1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}$$

$$E\left(Y\right)=(-1)\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+1\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)=\frac{-1}{3}$$

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=\frac{-1}{6}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1,\\ 0, & 其他。\end{cases}$ 令 $Y=X^2+1$，求

(I) Y 的概率密度 $f_Y\left(y\right)$； (Ⅱ) $P\left\{-1<Y<\frac{3}{2}\right\}$.

详解：(I)设 Y 的分布函数为 $F_Y\left(y\right)$，则

$$F_Y\left(y\right)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X^2+1\le y\right\}=P\left\{X^2\le y-1\right\}$$

若 $y \le 1$，则 $F_Y(y) = P\left\{X^2 \le y-1\right\} = P(\varnothing) = 0$

若$1 < y < 2$，则 $F_Y(y) = P\left\{-\sqrt{y-1} \le X \le \sqrt{y-1}\right\} = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} |x|\, dx = 2\int_0^{\sqrt{y-1}} x dx = y-1$

若 $y \ge 2$，则 $F_Y(y) = P\left\{-\sqrt{y-1} \le X \le \sqrt{y-1}\right\} = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$

Y 的分布函数为 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ y-1, & 1 < y < 2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$

Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, 1 < y < 2 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

(II) $P\left\{-1 < Y < \dfrac{3}{2}\right\} = P\left\{Y < \dfrac{3}{2}\right\} - P\{Y \le -1\} = F\left(\dfrac{3}{2} - 0\right) - F(-1) = \dfrac{3}{2} - 1 - 0 = \dfrac{1}{2}$