2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ ( )

(A)1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

答案：C

详解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+ax^2-bx^2+abx}{x^2-ax+bx-ab}}=e^{a-b}$

(2) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A) x (B) z (C) $-x$ (D) $-z$

答案：B

详解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{1}{x}}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$,

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=\dfrac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z$

(3) 设 m,n 是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 的取值有关
(C) 与 m,n 取值都有关 (D) 与 m,n 取值都无关

答案：(D)

详解：$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,

对于$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为$x=0$

设$n>1$ ，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot x^{\frac{1}{n}}=0, 0<\frac{1}{n}<1$故收敛。

设$n=1, m=1,2, \lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}$存在，$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$不是反常积分

设$n=1, m>2, \lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}\cdot x^{1-\frac{2}{m}}$存在， $0<1-\frac{2}{m}<1$，故$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$收敛。

对于，$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，瑕点为$x=1$，当$m$为正整数时，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot(1-x)^{\delta}=0$,

其中$0<\delta<1$，故$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$收敛

故选(D)。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ （　）

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

答案：D

详解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot n^2\cdot\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$$

(5) 设A为$m\times n$型矩阵，B为$n\times m$型矩阵，E为m阶单位矩阵，若$AB=E$，则（　）

(A) 秩$r(A)=m$,秩$r(B)=m$　　(B) 秩$r(A)=m$,秩$r(B)=n$

(C) 秩$r(A)=n$,秩$r(B)=m$　　　　(D) 秩$r(A)=n$,秩$r(B)=n$

答案：A

详解：由于$AB=E$，故$r(AB)=r(E)=m$.又由于$r(AB)\le r(A), r(AB)\le r(B)$，故

$$m\le r(A), m\le r(B) \qquad ①$$

由于A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，故

$$r(A)\le m, r(B)\le m \qquad ②$$

由①、②可得$r(A)=m, r(B)=m$，故选 A.

(6)设A为 4 阶对称矩阵，且$A^2+A=0$，若A的秩为 3，则A相似于　　(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

答案：D

详解：设λ为A的特征值，由于$A^2+A=0$，所以$\lambda^2+\lambda=0$，即$(\lambda+1)\lambda=0$，这样A的特征值为-1 或 0.由于A为实对称矩阵，故A可相似对角化，即$A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，

因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 x 的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则$P\{X=1\}=$　　(　　)

(A) 0　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　　(D)$1-e^{-1}$

答案：C

详解：$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-e^{-1}$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度， $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$f(x)=\begin{cases} af_1(x) & x\le 0 \\ bf_2(x) & x>0 \end{cases}(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足 ( )

(A) $2a+3b=4$ (B) $3a+2b=4$ (C) $a+b=1$ (D) $a+b=2$

答案：A

详解： $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$， $f_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & -1\le x\le 3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

利用概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b$$

所以 $2a+3b=4$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)du \end{cases}$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ ________.

答案：0

详解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}=-\ln(1+t^2)e^t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(-\ln(1+t^2)e^t\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[-\frac{2t}{1+t^2}\cdot e^t-\ln(1+t^2)e^t\right]\cdot(-e^t)，\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$$

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ________.

答案： -4π

详解：令 $\sqrt{x}=t$， $x=t^2$， $dx=2tdt$

原式 $=\int_0^{\pi} t\cos t\cdot 2tdt=\int_0^{\pi} 2t^2\cos tdt=2\int_0^{\pi} t^2 d\sin t$

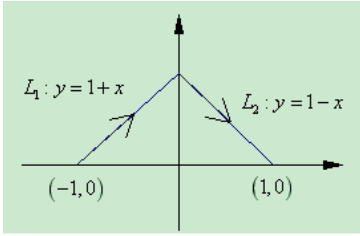
$=2\left[t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2t\sin tdt\right]=2\left[\int_0^{\pi} 2td\cos t\right]$

$=2\left[2t\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2\cos tdt\right]=4\pi\cos\pi-2\sin t\Big|_0^{\pi}=-4\pi$

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ $\{x\in[-1,1]\}$,起点是 (-1.0)，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$ ________.

答案：0

详解：$\int_L xydx+x^2dy=\int_{L_1}xydx+x^2dy+\int_{L_2}xydx+x^2dy$



$=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+x^2dx+\int_0^1 x(1-x)dx+x^2(-dx)$

$=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)dx+\int_0^1(x-2x^2)dx$

$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=0$

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$，则 Ω 的形心坐标 $\bar{z}=$ ________.

答案：$\frac{2}{3}$

详解：$\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz}=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\cdot\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1\right)}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr}$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^6}{12}\right)\Big|_0^1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}d\theta}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,\alpha)^T$,若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 形成的向量空间维数是 2，则 $\alpha=$ ________.

答案：$\alpha=6$

详解：因为由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 形成的向量空间维数为 2，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$.对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&\alpha-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\alpha=6$.

(14) 设随机变量 X 概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$.则 $EX^2=$ ________.

答案：2

详解：$1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce$ (利用 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$)，所以 $C=e^{-1}$

$P\left\{X=k\right\}=\dfrac{e^{-1}}{k!}=\dfrac{1^k}{k!}e^{-1}$即 X 服从参数为 1 的泊松分布.

$E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=1+1^2=2$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解

详解：先求方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解

由特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 解得特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$

所以方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y_c=C_1e^x+C_2e^{2x}$

下求 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的特解：设特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$，则

$\left(y^*\right)'=\left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x$，$\left(y^*\right)''=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)e^x$

带入原方程，解得 $a=-1,b=-2$，故特解为 $y^*=x(-x-2)e^x$

故方程的通解为 $y=y_c+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x\right)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值

详解：$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$

令 $f'(x)=0$，则 $x=0,x=\pm1$，又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$

$f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$，所以 $f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$ 是极大值.

$f''(\pm1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm1)=0$ 为极小值.

因为当 $x\geq1$时，$f'(x)>0$，$0\leq x<1$时，$f'(x)<0$，

$-1\leq x<0$时，$f'(x)>0$，$x<-1$时，$f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup[0,1)$；$f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1,0)\cup[1,+\infty)$

(17)(本题满分 10 分)

(I)比较$\int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt \ (n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由

(II)记$u_n = \int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt \ (n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

详解：(I)当$0<x<1$时$0<\ln(1+x)<x$，

故$\left[\ln(1+t)\right]^n < t^n$，所以$|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n < |\ln t| t^n$

$\therefore \int_0^1 |\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \ (n=1,2,\cdots)$

(II) $\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln t d\left(t^{n+1}\right) \ = \frac{1}{(n+1)^2}$

故由$0<u_n<\int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$，根据夹逼定理得$0 \le \lim\limits_{n\to\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$

故$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

详解：(I)

令$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|\cdot x^2 = x^2 < 1$

$\therefore -1<x<1$ 时级数收敛.

当$x=\pm 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼兹判别法知，此级数收敛，故原级数的收敛域为$\left[-1,1\right]$.

(II) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n} = x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\right)$

令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1} \qquad x\in(-1,1)$，

$\therefore S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1} \qquad x\in(-1,1)$，

$\therefore S_1'(x)=\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\dfrac{1}{1+x^2}\quad x\in(-1,1)$，

$\therefore S_1(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}dx+S_1(0)=\arctan x+0,\ x\in(-1,1)$.

$S_1(x)$ 在 $x=-1,1$ 上是连续的，所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的.

$\therefore S(x)=x\cdot\arctan x$. $\therefore$幂级数的和函数为 $x\arctan x$， $x\in[-1,1]$.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面为 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分.

$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

详解：(I)令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$

故动点 $P(x,y,z)$ 的切平面的法向量为 $(2x,2y-z,2z-y)$；

由切平面垂直 xOy，故所求曲线 C 的方程为：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}$

(II) 由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ 2z-y=0,\end{cases}$ 消去 z ,立马可得投影柱面 $D_{xy}: x^2+\dfrac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$,

由 $\left(x^2+y^2+z^2-yz\right)'_x=(1)'_x$,得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z}$,同理得, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z-2y}{y-2z}$

因而可得 $dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\dfrac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy$,

所以，$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x+\sqrt{3}\right)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\pi\cdot1\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解

(I) 求 λ, a；

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解析：方法一：（I）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解 $\therefore r(A)=r(A,b)<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

此时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，$Ax=b$ 无解，所以 $\lambda\neq 1$。

当 $\lambda=-1$，$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$

由于 $r(A)=r(A,b)<3$，所以 $a=-2$。因此，$\lambda=-1$，$a=-2$。

（II）$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}\\ x_3=x_3\end{cases}$，$\therefore \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$。

$\therefore Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ ，k 为任意常数。

方法二：（I）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解

$\therefore r(A)=r(A,b)<3$

又 $|A|=0$，即 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，知 $\lambda=1$ 或-1。

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，此时，$Ax=b$ 无解，$\therefore\lambda=-1$。代入由 $\therefore r(A)=r(A,b)$ 得 $a=-2$。

（II）$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\0 & -2 & 0 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\0 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=x_3+\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\\x_3=x_3\end{cases}$ ，$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$。

$\therefore Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ ，k 为任意常数。

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A；

(II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵

解析：（1）由于二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$。

由于 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，所以 A 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，记 $\alpha_3=(1,0,1)^T$。

由于 A 是实对称矩阵，所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，设属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $\alpha^T\alpha_3=0$，即 $x_1+x_3=0$。取

$$\alpha_1=(0,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T,$$

则 α_1,α_2 为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量。

方法一：由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,0)$，两边取转置，得 $\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。

解此矩阵方程：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&0&1&0\\-1&0&1&-1&0&1\\1&0&1&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

所以，$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

方法二：

由于 α_1,α_2 是相互正交的，所以只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=(0,1,0)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T。$$

取$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，

$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

（2）A+E 也是实对称矩阵，A 的特征值为 1，1，0，所以 A+E 的特征值为 2，2，1，由于 A+E 的特征值全大于零，故 A+E 是正定矩阵。

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，求常数$A$及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$

详解：$f\left(x,y\right)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}=Ae^{-(y-x)^2}e^{-x^2}$

$$=A\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$$

利用概率密度的性质得到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dxdy=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy]dx$$

因为，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy\ \underline{\underline{\sqrt{2}(y-x)=t}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$；

同理，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx=1$，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=A\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy]dx=A\pi$$

(利用正态分布的概率密度为 1，即$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$)，得到$A=\pi^{-1}$

即 $f(x,y)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\right]$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中$\theta\in(0,1)$未知，以N_i来表示来自总体X 的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数($i=1,2,3$).试求常数a_1,a_2,a_3，使$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为θ的无偏估计量，并求T 的方差.

详解：$N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2)$

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)$$

$$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n(\theta^2)=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2$$

因为T 是θ的无偏估计量，所以$E(T)=\theta$即得

$$\begin{cases} na_1 = 0 \\ n(a_2 - a_1) = 1 \\ n(a_3 - a_2) = 2 \end{cases}$$ 整理得到 $$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \dfrac{1}{n} \\ a_3 = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

所以统计量$T = 0 \times N_1 + \frac{1}{n} N_2 + \frac{1}{n} \times N_3 = \frac{1}{n} \times (N_2 + N_3) = \frac{1}{n} \times (n - N_1)$

$$D(T) = D\left[\frac{1}{n} \times (n - N_1)\right] = \frac{1}{n^2} D(n - N_1) = \frac{1}{n^2} D(N_1) = \frac{1}{n^2} \times n \times (1-\theta) \times \theta = \frac{1}{n}(1-\theta)\theta$$

